

Homologietheorie ohne Löcher

Jesko Hüttenhain

Ein topologischer Sommersemestertraum 2008,
Universität Bonn

Zusammenfassung

In Ermangelung einer zufriedenstellenden Einführung in die Homologietheorie wurde dieses Dokument aus dem groben Gerüst meiner Vorlesungsnotizen angefertigt, um eben dies zu leisten. Im Vordergrund steht dabei die Überzeugung, dass uns die Anschauung als Sahnehäubchen den Geschmack versüßen, jedoch bitte nicht als Hauptgericht serviert werden soll. Mit anderen Worten: Jede Aussage wurde nach bestem Wissen und Gewissen vollständig und formal korrekt bewiesen.

Wo immer mir dies nicht möglich war, sei allen Lesern hiermit versichert, dass ich weiterhin fieberhaft an der Vervollständigung dieses Dokuments arbeite und auch gerne jede Form von Fragen, Anregungen und Verbesserungsvorschlägen entgegennehme. Fast alle notwendigen Aussagen der homologischen Algebra, die üblicherweise dem Leser als Übungsaufgabe überlassen werden, sind von meinem guten Freund und Mitstreiter Nikolai in [NIK] ausschöpfend erörtert worden, was es mir ohne Gewissensbisse ermöglicht, es in diesen Fällen bei einer Referenz zu belassen.

Niemals aufgeben, niemals kapitulieren.

Inhaltsverzeichnis

1	Simpliziale Komplexe	4
2	Kettenkomplexe und Homologie	7
3	Simpliziale Homologie	14
4	Simpliziale Mengen	16
5	Singuläre Homologie	26
6	H_1 und π_1	30
7	Homotopieinvarianz singulärer Homologie	35
8	Relative singuläre Homologie	41
9	Beweis des Ausschneidungssatzes	46
10	Anwendungen der singulären Homologie	54
11	Zelluläre Homologie	65
12	Homologie mit Koeffizienten	74
13	Tor und andere Linksderivierte	75
14	Singuläre Homologie von Produkten	93

1 Simpliziale Komplexe

Definition 1.1. Die Punkte $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ sind in **allgemeiner Lage** wenn die Vektoren $x_0 - x_1, \dots, x_0 - x_q$ linear unabhängig sind. Sind x_0, \dots, x_q in allgemeiner Lage, so heißt die Punktmenge

$$\begin{aligned} \sigma &:= \sigma_q := (x_0, \dots, x_q) \\ &:= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_0, \dots, \lambda_q > 0 \text{ mit } y = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \text{ und } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned}$$

das **offene q -Simplex** mit den **Ecken** x_0, \dots, x_q . Die Zahl $\dim(\sigma_q) := q$ heißt **Dimension** von $\sigma = \sigma_q$. Für einen Punkt $y = \sum_i \lambda_i x_i \in \sigma$ heißen die λ_i **baryzentrische Koordinaten** von y .

Die Punktmenge

$$\bar{\sigma} = \left\{ x \mid x = \sum_i \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

heißt **abgeschlossenes q -Simplex** und $\dot{\sigma} := \bar{\sigma} \setminus \sigma$ der **Rand** des Simplex.

Bemerkung. Als topologischer Raum hängt σ nicht von der Reihenfolge seiner Ecken x_i ab.

Fakt 1.2. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. σ_q und $\bar{\sigma}_q$ sind konvex.
2. $\bar{\sigma}_q \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.
3. $\sigma_q \subset \mathbb{R}^n$ ist offen $\Leftrightarrow q = n$.
4. Die Ecken von $\bar{\sigma}_q$ sind genau die Punkte von $\bar{\sigma}_q$, die nicht Mittelpunkt einer in $\bar{\sigma}_q$ liegenden, nicht ausgearteten Strecke sind.
5. Wenn $\sigma_q = (x_0, \dots, x_q)$ ein q -Simplex ist, so sind die Ecken x_i durch den topologischen Raum $\sigma_q \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig bis auf Reihenfolge bestimmt.

Beweis. Aussage 2 ist offensichtlich und 3 folgt aus 5 aufgrund der eindeutigen Anzahl Ecken. Weiterhin folgt 5 aus 4, womit wir uns also auf den Beweis dieser Aussage beschränken können. Dazu benötigen wir noch etwas zusätzliche Terminologie.

Definition 1.3. Seien $\sigma, \tau \in \mathbb{R}^n$ Simplizes. Falls alle Ecken von τ auch Ecken von σ sind, so heißt τ eine **Seite** von σ . In diesem Falle schreiben wir $\tau \leq \sigma$. Gilt weiterhin $\tau \neq \sigma$, so heißt τ **echte Seite** von σ und wir schreiben $\tau < \sigma$.

Wir zeigen nun Behauptung 4 für $\sigma_q = (x_0, \dots, x_q)$ durch Induktion nach q . Für $q = 0$ ist die Aussage trivial, sei also $q \geq 1$ und $x \in \bar{\sigma}_q \setminus \{x_i \mid 0 \leq i \leq q\}$. Liegt x auf einer Seite $\bar{\sigma}_{q-1}$ von $\bar{\sigma}_q$, so sind wir gemäß Induktionsannahme bereits fertig. Also sei $x \in \sigma_q$, d.h. es existiert eine Umgebung $B_\varepsilon(x) \subset \sigma_q \subset \bar{\sigma}_q$ und $x_\pm := x \pm \frac{\varepsilon}{2} \cdot e_1$ definieren eine Strecke $[x_+, x_-] \subset \sigma_q$ mit Mittelpunkt x .

Sei nun andererseits $[x_+, x_-] \subset \overline{\sigma_q}$ eine Strecke mit Mittelpunkt $x \in \overline{\sigma_q}$. Liegt die Strecke ganz auf einer Seite, so sind wir gemäß Induktionsannahme fertig, andernfalls ist $[x_+, x_-] \subset \sigma_q$ und wegen $x_+ \neq x_-$ ist $x = \frac{1}{2} \cdot (x_+ + x_-)$ keine Ecke.

Es bleibt noch, 1 zu zeigen. Dazu seien x, y Punkte des (abgeschlossenen) q -Simplex, etwa $x = \sum_{i=0}^q \xi_i x_i$ und $y = \sum_{i=0}^q \eta_i x_i$. Dann ist für jedes $t \in [0, 1]$

$$t \cdot x + (1-t) \cdot y = \sum_{i=0}^q (t\xi_i + (1-t)\eta_i) \cdot x_i \in \sigma_q,$$

da $\sum_i t\xi_i + (1-t)\eta_i = t \sum_i \xi_i + (1-t) \sum_i \eta_i = t + 1 - t = 1$. Nun stellen wir für den (abgeschlossenen) Simplex nach, dass für $0 \leq i \leq q$ und alle t stets $t\xi_i + (1-t)\eta_i > 0$ (bzw. ≥ 0) gilt, womit die Aussage bewiesen ist. \square

Definition 1.4. Ein (endlicher) **Simplizialkomplex** $K \subset \mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge von Simplexes im \mathbb{R}^n mit folgenden Eigenschaften:

1. $\tau < \sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$
2. $\sigma, \tau \in K$ mit $\tau \neq \sigma \Rightarrow \sigma \cap \tau = \emptyset$

Wir setzen $\dim(K) := \max \{ \dim(\sigma) \mid \sigma \in K \}$. Weiterhin heißt

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n,$$

versehen mit der Unterraumtopologie, die **Realisierung** von K .

Topologische Unterräume des \mathbb{R}^n heißen **Polyeder**, falls sie von der Form $|K|$ sind. Ist X ein topologischer Raum mit $X \cong |K|$, so sagen wir, dass K eine **Triangulierung** von X ist. Ein topologischer Raum, für den eine Triangulierung existiert, heißt **triangulierbar**.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass alle glatten, komplexen Mannigfaltigkeiten und alle topologischen, kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension ≤ 3 triangulierbar sind.

Definition 1.5. Sei σ ein q -Simplex.

1. Zwei Anordnungen der Ecken von σ heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow$ Sie gehen durch eine gerade Permutation auseinander hervor.
2. Eine **Orientierung** von σ ist eine Äquivalenzklasse von Anordnungen. Nach Wahl einer Orientierung schreiben wir $\sigma = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$ für den **orientierten q -Simplex** σ .

Jedes 0-Simplex lässt sich auf genau eine Weise orientieren, jedes q -Simplex mit $q > 0$ auf genau zwei. Falls σ ein orientierter q -Simplex ist, so schreiben wir σ^{-1} für den Simplex mit der entgegengesetzten Orientierung. Im Falle $q = 0$ bedeutet dies $\sigma = \sigma^{-1}$.

Bemerkung. Eine Orientierung von $\sigma = \langle x_0, \dots, x_i, \dots, x_q \rangle$ induziert eine Orientierung auf jeder seiner Seiten τ mit $\dim(\tau) = q - 1$ durch

$$\tau = (-1)^i \cdot \langle x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q \rangle.$$

Wir diskutieren kurz die Wohldefiniertheit. Für jede Permutation der Ecken von σ gilt folgendes: Wenn x_i an einer geraden Anzahl Nachbarschaftsvertauschungen beteiligt ist, so hat die induzierte Permutation auf den Ecken von τ das gleiche Vorzeichen - und da x_i nun an der Stelle $i + 2k$ steht, verändert sich auch der Vorfaktor um $(-1)^{2k} = 1$.

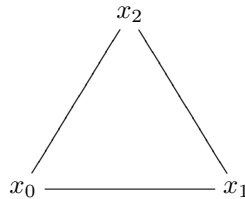
Ist andererseits x_i an einer ungeraden Anzahl Nachbarschaftsvertauschungen beteiligt, so ändern sich sowohl Vorfaktor als auch Vorzeichen um -1 , demnach bleibt alles beim alten.

Definition 1.6. Sei K ein Simplicialkomplex mit Ecken z_0, \dots, z_r . Wir bezeichnen die Menge der orientierten q -Simplizes von K mit Σ^q . Für $q \in \mathbb{Z}$ definiere die q -te **Kettengruppe von K** als

$$C_q(K) := \begin{cases} \mathbf{0} & ; \quad q < 0, \\ \mathbb{Z}[\Sigma^q] / \sim & ; \quad \text{andernfalls} \end{cases}$$

wobei die Äquivalenzrelation " \sim " gegeben ist durch $\sigma_q \sim -\sigma_q^{-1}$.

Beispiel 1.7. Wir betrachten den Simplex



mit anderen Worten, sei

$$K := \{ (x_0, x_1, x_2), (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_0), (x_1), (x_2) \}.$$

In diesem Fall ist

$$C_0(K) = \mathbb{Z} \cdot \langle x_0 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_1 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^3$$

$$C_1(K) = \begin{aligned} & \mathbb{Z} \cdot \langle x_0, x_1 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_1, x_2 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_0, x_2 \rangle \\ & \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_1, x_0 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_2, x_1 \rangle \oplus \mathbb{Z} \cdot \langle x_2, x_0 \rangle / \sim \cong \mathbb{Z}^3 \end{aligned}$$

$$C_2(K) = \mathbb{Z} \cdot \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle x_1, x_0, x_2 \rangle / \sim \cong \mathbb{Z}$$

Wir werden nun Abbildungen $C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ definieren, welche als "Differenziale" bezeichnet werden, um damit die Homologiegruppen von K zu definieren.

Hierzu verwenden wir Methoden der homologischen Algebra. Da diese in der algebraischen Topologie und anderen Gebieten der Mathematik immer wieder wichtig sind, werden wir einige Aspekte in größerer Allgemeinheit behandeln als zur Zeit nötig.

2 Kettenkomplexe und Homologie

*It's better to have a clean death from a sharp blade,
than to tangle with a goblin's rusted chains.*

Wir betrachten im folgenden einen fest gewählten Ring R mit $1 \in R$ und die Kategorie \mathbf{Mod}_R der R -Moduln (mit R -linearen Abbildungen als Morphismen).

Wir bemerken an dieser Stelle für die kategoriell Interessierten, dass nahezu alle folgenden Definitionen und Sätze sich auf abelsche Kategorien verallgemeinern lassen, meist durch Anwendung des Einbettungssatzes von Freyd-Mitchell.

Definition 2.1. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von R -Moduln. Definiere

1. den **Kern von f** als $\ker(f) := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ zusammen mit der offensichtlichen Inklusionsabbildung $\iota : \ker(f) \hookrightarrow M$.
2. das **Bild von f** als $\operatorname{im}(f) := \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$ zusammen mit der offensichtlichen Inklusionsabbildung $\iota : \operatorname{im}(f) \hookrightarrow N$.
3. den **Cokern von f** als $\operatorname{coker}(f) := N/\operatorname{im}(f)$ zusammen mit der kanonischen Projektionsabbildung $\pi : N \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(f)$.

Fakt 2.2 (Universelle Eigenschaft von Kern und Cokern). Sei $f : M \rightarrow N$.

1. Für jede Abbildung $g : L \rightarrow M$ mit $f \circ g = 0$ gibt es eine eindeutige Abbildung $h : L \rightarrow \ker(f)$, so dass $g = \iota \circ h$. Als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \ker(f) & \xleftarrow{\iota} & M & \xrightarrow{f} & N \\
 & \swarrow \exists! & \uparrow \forall g & \searrow \mathbf{0} & \\
 & & L & &
 \end{array}$$

2. Die duale Aussage¹ bedeutet in Diagrammform

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{coker}(f) \\
 & \searrow \mathbf{0} & \downarrow \forall g & \swarrow \exists! & \\
 & & L & &
 \end{array}$$

Mit anderen Worten: Zu jeder Abbildung $g : N \rightarrow L$ mit $g \circ f = 0$ gibt es ein $h : \operatorname{coker}(f) \rightarrow L$, so dass $g = h \circ \pi$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis von 1, da 2 daraus aufgrund von Dualität folgt.

¹Das Dual eines Diagramms erhält man durch Umkehrung aller Pfeile. Oft erspart man sich einen separaten Beweis für die duale Aussage, falls alle Argumente im Beweis der ursprünglichen Behauptung mit diesem Prozess verträglich sind.

Existenz von h . Sei $l \in L$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $f(g(l)) = 0$, also $g(l) \in \ker(f)$. Dann liefert $h(l) := g(l)$ die gewünschte Abbildung $L \rightarrow \ker(f)$. Da g R -linear ist, ist auch h R -linear.

Eindeutigkeit von h . Angenommen, es gäbe eine Abbildung $\tilde{h} \neq h$ mit der gleichen Eigenschaft. Dann existiert ein $l \in L$ mit $\tilde{h}(l) \neq h(l)$, also $\tilde{h}(l) \neq g(l)$, ein Widerspruch. \square

Von nun an sind alle Objekte grundsätzlich R -Moduln und alle Abbildungen zwischen ihnen R -linear, d.h. wir arbeiten in der Kategorie \mathbf{Mod}_R .

Definition 2.3. Ein Kettenkomplex $C = (C, d)$ ist ein graduerter Modul

$$C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$$

zusammen mit einer Abbildung $d : C \rightarrow C$, so dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt: C_n ist ein R -Modul, $d \circ d = \mathbf{0}$ und $\text{im}(d|_{C_n}) \subseteq C_{n+1}$.

Die Abbildungen $d_n := d|_{C_n}$ heißen **Differentiale** von C . Wir definieren weiterhin

1. $Z_n(C) := \ker(d_n)$, die n -**Zykel** von C .
2. $B_n(C) := \text{im}(d_{n+1})$, die n -**Ränder** von C .

Häufig schreibt man statt (C, d) auch

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Bemerkung. In größerer Allgemeinheit definiert man einen Kettenkomplex $C = (C, d)$ als eine Familie von Objekten $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ zusammen mit einer Familie von Abbildungen $\{d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, so dass $\forall n \in \mathbb{Z} : d_{n-1} \circ d_n = 0$. In unserem Falle ist dies äquivalent zu 2.3.

Fakt 2.4. Für jeden Kettenkomplex (C, d) und jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $Z_n(C)$ und $B_n(C)$ sind R -Untermodule von C_n , und weiterhin gilt $B_n(C) \subseteq Z_n(C) \subseteq C_n$.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition. Da $d_n \circ d_{n+1} = 0$, gilt auch $B_n(C) = \text{im}(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n) = Z_n(C)$. \square

Definition 2.5. Die n -te **Homologie** von $C = (C, d)$ ist definiert als

$$H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$$

Beispiel 2.6. Sei (C, d) ein Kettenkomplex.

1. Falls $d = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : d_n = \mathbf{0}$, so ist $Z_n(C) = C_n$ und $B_n(C) = \mathbf{0}$ und daher $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C) = C_n/\mathbf{0} = C_n$.

2. Angenommen, C ist von der Form

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{0}} C_n \xrightarrow{\text{id}} C_{n-1} \xrightarrow{\mathbf{0}} C_{n-2} \xrightarrow{\text{id}} \cdots$$

Dann ist für $k \in \mathbb{Z}$:

$$H_k(C) = \left\{ \begin{array}{l} \ker(\text{id})/\text{im}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}/\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad ; \quad k \equiv n \pmod{2} \\ \ker(\mathbf{0})/\text{im}(\text{id}) = C_k/C_k = \mathbf{0} \quad ; \quad k \not\equiv n \pmod{2} \end{array} \right\} = \mathbf{0}$$

3. Sei $R = \mathbb{Z}$ und C der Kettenkomplex

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6 = C_0 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \cdots$$

Dies ist wohldefiniert, da $2 \cdot 3 = 0$ in \mathbb{Z}_6 . Es gilt nun

$$\begin{aligned} H_2(C) &= \ker(\mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6)/\text{im}(\mathbf{0}) \cong \mathbb{Z}_2/\mathbf{0} \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_1(C) &= \ker(\mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6)/\text{im}(\mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_3 \cong \mathbf{0} \\ H_0(C) &= \ker(\mathbf{0})/\text{im}(\mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

4. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\Omega^n(X)$ der \mathbb{R} -Vektorraum der n -Formen auf X . Dann gibt es Abbildungen

$$d_n : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^{n+1}(X)$$

mit $d_{n+1} \circ d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dieser Kettenkomplex heißt **De Rham - Komplex von X** und seine Homologie ist die **De Rham - Homologie von X** .

Definition 2.7. Seien $C = (C, d^C)$ und $D = (D, d^D)$ zwei Kettenkomplexe. Eine **Abbildung von Kettenkomplexen** ist eine Abbildung $f : C \rightarrow D$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $f_n := f|_{C_n}$ gilt:

1. $\text{im}(f_n) \subseteq D_n$
2. $d^D \circ f = f \circ d^C$

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm muss kommutieren:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{d_n^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^C} & C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}^C} \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\ \cdots & \xrightarrow{d_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{d_n^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^D} & D_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}^D} \cdots \end{array}$$

Wir erhalten dadurch die **Kategorie der Kettenkomplexe von R -Moduln**, die wir mit $\text{Ch}(\text{Mod}_R)$ bezeichnen.

Lemma 2.8. Jeder Morphismus $f : C \rightarrow D$ in $\text{Ch}(\mathbf{Mod}_R)$ induziert Abbildungen $Z_n(C) \rightarrow Z_n(D)$, $B_n(C) \rightarrow B_n(D)$ und $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $c \in Z_n(C)$, mit anderen Worten $d_n^C(c) = 0$. Dann folgt

$$0 = f_{n-1}(d_n^C(c)) = d_n^D(f_n(c)),$$

also $f_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$. Sei nun $b \in B_n(C)$ und $a \in C_{n+1}$, so dass $d_{n+1}^C(a) = b$. Dann folgt

$$f_n(b) = f_n(d_{n+1}^C(a)) = d_{n+1}^D(f_{n+1}(a)) \in \text{im}(d_{n+1}^D) = B_n(D),$$

also $f_n(B_n(C)) \subseteq B_n(D)$.

Die Aussage für $H(C)$ folgt aus der Aussage für Z_\bullet und B_\bullet :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & B_n(C) & \xleftarrow{\iota_C} & Z_n(C) & \xrightarrow{\pi_C} & H_n(C) = \text{coker}(\iota_C) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow \exists! h \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & B_n(D) & \xleftarrow{\iota_D} & Z_n(D) & \xrightarrow{\pi_D} & H_n(D) = \text{coker}(\iota_D) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Wir haben $\mathbf{0} = \pi_D \circ \iota_D \circ f = \pi_D \circ f \circ \iota_C$, daher auch $\mathbf{0} = \pi_D \circ f$ wegen Injektivität von ι_C und somit die Existenz der Abbildung h gemäß 2.2 (2). \square

Definition 2.9. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ heißt **exakt bei B** , falls $\text{im}(f) = \ker(g)$ ist. Ein Kettenkomplex (C, d) heißt **azyklisch**, falls er an jeder Stelle C_n exakt ist. Man sagt dann auch, (C, d) ist **exakt**.

Bemerkung. C ist azyklisch $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : H_n(C) = \mathbf{0}$.

Fakt 2.10. Die folgenden Aussagen sind offensichtlich:

1. Ein Kettenkomplex der Form

$$\dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots$$

ist genau dann azyklisch, wenn $d_n : C_n \xrightarrow{\sim} C_{n-1}$ ein Isomorphismus ist.

2. Ein Kettenkomplex der Form

$$\dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots$$

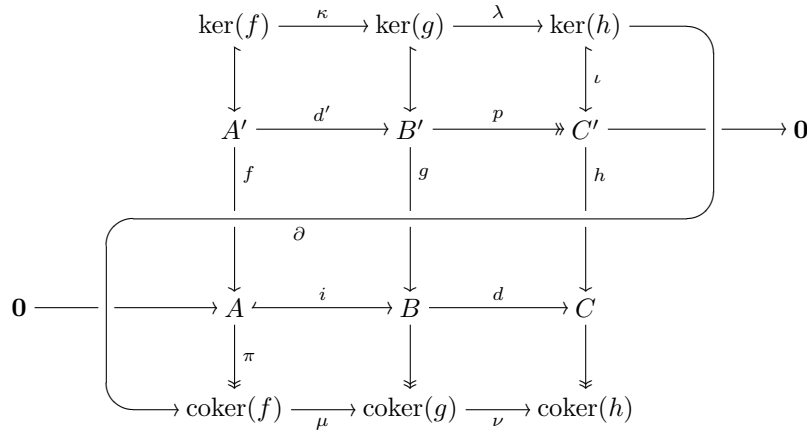
ist azyklisch $\Leftrightarrow \text{im}(d_n) = \ker(d_{n-1})$, d_n ist injektiv und d_{n-1} surjektiv. \square

Lemma 2.11 (Schlangenlemma). Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & A' & \xrightarrow{d'} & B' & \xrightarrow{p} & C' \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{d} & C \end{array}$$

mit beiden Zeilen exakt.

Dann existiert ein Diagramm



mit kommutativen Quadraten, so dass

$$\ker(f) \xrightarrow{\kappa} \ker(g) \xrightarrow{\lambda} \ker(h) \xrightarrow{\partial} \text{coker}(f) \xrightarrow{\mu} \text{coker}(g) \xrightarrow{\nu} \text{coker}(h)$$

exakt ist. Weiterhin gilt:

1. Für alle $c' \in \ker(h)$ ist $\partial(c') = (\pi \circ i^{-1} \circ g \circ p^{-1} \circ \iota)(c')$. (Dies ist so zu verstehen, dass unter den Abbildungen p und i ein Urbild gewählt wird.)
2. Ist d' injektiv, so ist κ injektiv.
3. Ist d surjektiv, so ist auch ν surjektiv.

Darüber ist die Konstruktion natürlich. Für weitere Details siehe [NIK, Sektion 1]. \square

Lemma 2.12 (Fünferlemma). Gegeben sei ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 \downarrow d & & \cong \downarrow e & & \downarrow f & & \cong \downarrow g & & \downarrow h \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
 \end{array}$$

mit beiden Zeilen exakt. Es sei d surjektiv, h injektiv und sowohl e als auch g ein Isomorphismus. Dann ist f ein Isomorphismus. \square

Beispiel 2.13. Die Aussage von 2.12, dass C und C' isomorph sind, benötigt die Existenz einer Abbildung $f : C \rightarrow C'$, wie das folgende (Gegen-)Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & \downarrow \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Definition 2.14. Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Morphismen in $\text{Ch}(\mathbf{Mod}_R)$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Sequenz $\mathbf{0} \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow \mathbf{0}$ exakt ist. Dann heißt $\mathbf{0} \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \mathbf{0}$ eine **kurze, exakte Sequenz von Kettenkomplexen**. Wir kürzen dies mit **keS** ab.

Proposition 2.15 (Lange Exakte Sequenz). *Sei $\mathbf{0} \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \mathbf{0}$ eine keS in $\text{Ch}(\mathbf{Mod}_R)$. Dann existiert eine induzierte, lange, exakte Sequenz von Homologiegruppen*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(B) & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(C) \\ & & & & \searrow \partial_n & & \\ & & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{H_{n-1}(f)} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{H_{n-1}(g)} & H_{n-1}(C) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \end{array}$$

Es gilt weiterhin, unter leichtem Missbrauch der Notation:

$$\forall c \in Z_n(C) : \partial_n([c]) = [(f_{n-1}^{-1} \circ d_n^B \circ g_n^{-1} \circ \iota_n^C)(c)],$$

wobei $\iota_n^C : Z_n(C) \hookrightarrow C_n$ die Inklusion bezeichne.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass wegen $B_n(A) \subseteq Z_n(A) = \ker(d_n^A)$ nach dem Homomorphiesatz

$$\begin{array}{ccccc} & & d_n^A & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ A_n & \xrightarrow{\quad} & Z_{n-1}(A) & \xleftarrow{\iota_{n-1}^A} & A_{n-1} \\ & \searrow p_n^A & \nearrow \exists! & & \\ & & A_n/B_n(A) & & \end{array}$$

eine Abbildung $\delta_n^A : \text{coker}(d_{n+1}^A) \rightarrow Z_{n-1}(A)$ existiert, so dass

$$\iota_{n-1}^A \circ \delta_n^A \circ p_n^A = d_n^A.$$

Ebenso erhalten wir entsprechende Abbildungen δ_n^B und δ_n^C . Wir betrachten nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & Z_{n+1}(A) & \longrightarrow & Z_{n+1}(B) & \longrightarrow & Z_{n+1}(C) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & A_{n+1} & \xleftarrow{f_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C_{n+1} \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow d_{n+1}^A & & \downarrow d_{n+1}^B & & \downarrow d_{n+1}^C \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & A_n & \xleftarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow p_n^A & & \downarrow p_n^B & & \downarrow p_n^C \\ & & \text{coker}(d_{n+1}^A) & \xrightarrow{\mu_n} & \text{coker}(d_{n+1}^B) & \xrightarrow{\nu_n} & \text{coker}(d_{n+1}^C) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma (2.11) sind die oberste und unterste Zeile ebenfalls exakt. Zusammen mit den oben konstruierten Abbildungen erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{coker}(d_{n+1}^A) & \xrightarrow{\mu_n} & \text{coker}(d_{n+1}^B) & \xrightarrow{\nu_n} & \text{coker}(d_{n+1}^C) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
\downarrow \delta_n^A & & \downarrow \delta_n^B & & \downarrow \delta_n^C & & \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & Z_{n-1}(A) & \longleftarrow & Z_{n-1}(B) & \longrightarrow & Z_{n-1}(C)
\end{array}$$

Sofern es kommutiert, können wir das Schlangenlemma anwenden: Man prüft leicht nach, dass

$$\ker(\delta_n^A) = Z_n(A)/B_n(A) = H_n(A)$$

und

$$\text{coker}(\delta_n^A) = Z_{n-1}(A)/B_{n-1}(A) = H_{n-1}(A),$$

womit wir unsere exakte (Teil-)Sequenz

$$H_n(A) \rightarrow H_n(B) \rightarrow H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B) \rightarrow H_{n-1}(C)$$

erhalten würden. Die Aussage über die konkrete Darstellung des Verbindungsmorphismus folgt ebenfalls aus dem Schlangenlemma.

Es genügt demnach, Kommutativität des obigen Diagramms zu zeigen. Wir zeigen nur Kommutativität des linken Quadrats, da der Beweis für das rechte Quadrat absolut äquivalent ist. Betrachte also den folgenden Ausschnitt:

$$\begin{array}{ccc}
A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n \\
\downarrow p_n^A & & \downarrow p_n^B \\
\text{coker}(d_{n+1}^A) & \xrightarrow{\mu_n} & \text{coker}(d_{n+1}^B) \\
\downarrow \delta_n^A & & \downarrow \delta_n^B \\
Z_{n-1}(A) & \xleftarrow{\alpha} & Z_{n-1}(B) \\
\downarrow \iota_{n-1}^A & & \downarrow \iota_{n-1}^B \\
A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1}
\end{array}$$

Wir wissen um die Kommutativität dieses Diagramms überall, außer im mittleren Quadrat, wo dies zu zeigen ist. Dazu müssen wir zwar einige Umwege laufen, doch schlussendlich gilt

$$\begin{aligned}
\iota_{n-1}^B \circ \delta_n^B \circ \mu_n \circ p_n^A &= \iota_{n-1}^B \circ \delta_n^B \circ p_n^B \circ f_n = d_n^B \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^A \\
&= f_{n-1} \circ \iota_{n-1}^A \circ \delta_n^A \circ p_n^A = \iota_{n-1}^B \circ \alpha \circ \delta_n^A \circ p_n^A.
\end{aligned}$$

Da die Surjektion p_n^A rechts-kürzbar ist und die Injektion ι_{n-1}^B links-kürzbar, liefert dies $\delta_n^B \circ \mu_n = \alpha \circ \delta_n^A$ und damit die gesamte Aussage. \square

3 Simpliciale Homologie

Im Folgenden sei K stets ein simplicialer Komplex (siehe 1.4). Wir hatten bereits in 1.6 die abelsche Gruppe $C_q(K)$ der q -Ketten auf K eingeführt.

Definition 3.1. Sei $\sigma = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$ ein orientierter q -Simplex.

1. Wir setzen $\partial_i(\sigma) := \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle := \langle x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q \rangle$. Dies ist eine Seite von σ der Dimension $q - 1$ mit der darauf induzierten Orientierung.
2. Definiere $\partial(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_i(\sigma) \in C_{q-1}(K)$
3. Sei $c = \sum_{j=1}^k n_j \sigma_q^j \in C_q(K)$. Dann setzen wir

$$\partial(c) := \sum_{j=1}^k n_j \partial(\sigma_q^j) \in C_{q-1}(K)$$

Lemma 3.2. ∂ definiert eine Abbildung $C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ und es gilt $\partial^2 = 0$. Mit anderen Worten, $(C_\bullet(K), \partial)$ ist ein Kettenkomplex.

Beweis. Zunächst zeigen wir für $q \geq 1$, dass $\partial(\sigma_q) = -\partial(\sigma_q^{-1})$ gilt, um zu verifizieren, dass ∂ eine Abbildung definiert. Dies genügt, da ∂ \mathbb{Z} -linear ist. Sei also $\sigma_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle$. Wir bemerken zunächst, dass für $2 \leq i \leq q$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial_i(\sigma_q) &= \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q \rangle \\ &= -\langle x_1, x_0, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q \rangle = -\partial_i(\sigma_q^{-1}) \end{aligned}$$

Damit folgt nun direkt

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_i(\sigma_q) = \sum_{i=2}^q (-1)^i \partial_i(\sigma_q) + \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle - \langle x_0, x_2, \dots, x_q \rangle \\ &= -\left(\sum_{i=2}^q (-1)^i \partial_i(\sigma_q^{-1}) + \langle x_0, x_2, \dots, x_q \rangle - \langle x_1, x_2, \dots, x_q \rangle \right) \\ &= -\sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_i(\sigma_q^{-1}) = -\partial(\sigma_q^{-1}). \end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir noch

$$\begin{aligned} \partial^2(\sigma_q) &= \partial \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_i(\sigma_q) \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial(\partial_i(\sigma_q)) \\ &= \sum_{i=0}^q \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle \dots \hat{x}_j \dots \hat{x}_i \dots \rangle + \sum_{j=i+1}^q (-1)^{i+j-1} \langle \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots \rangle \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \langle \dots \hat{x}_j \dots \hat{x}_i \dots \rangle - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} \langle \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots \rangle = 0, \end{aligned}$$

was den Beweis vollendet. \square

Definition 3.3. Die **simpliciale Homologie** von K ist definiert durch

$$H_q(K) := H_q(K, \mathbb{Z}) := H_q(C_\bullet(K), \partial)$$

Bemerkung 3.4. 1. Es gilt $H_q(K) = \mathbf{0}$ für $q < 0$ und $q > \dim(K)$.

2. Wenn man auf einem simplicialen Komplex alle Simplizes auf verträgliche Art und Weise orientieren kann, so ist $C_q(K)$ isomorph zur freien abelschen Gruppe erzeugt von diesen orientierten Simplizes.

Beispiel 3.5. Wir diskutieren einige Beispiele für Simplicialkomplexe und deren Homologie.

1. Sei $K = \langle x_0 \rangle$ ein einzelner Punkt. Dann ist $C_\bullet(K)$ der Komplex

$$\dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} = C_0(K) \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots$$

und daher

$$H_q(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad q = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei nun $K = \{ \langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1 \rangle, \langle x_0 \rangle \}$. Damit ist

$$\dots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \langle x_0, x_1 \rangle \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \langle x_0 \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle x_1 \rangle = C_0(K) \xrightarrow{\mathbf{0}} \dots$$

wobei ι durch $\langle x_0, x_1 \rangle \mapsto \langle x_1 \rangle - \langle x_0 \rangle$ definiert ist. Also erhalten wir

$$\begin{array}{ll} Z_0(K) & = \ker(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0}) \cong \mathbb{Z}^2 & Z_1(K) & = \ker(\iota) = \mathbf{0} \\ B_0(K) & = \text{im}(\iota) \cong \mathbb{Z} & B_1(K) & = \text{im}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow H_0(K) & \cong \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} & \Rightarrow H_1(K) & = \mathbf{0} \end{array}$$

4 Simpliziale Mengen

Warum einfach, wenn es auch kompliziert geht.

Wir konstruieren im Folgenden die Kategorie der simplizialen Mengen, die wir mit $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$ bezeichnen.

Variante: Es ist $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab})$ die Kategorie der simplizialen abelschen Gruppen.

Außerdem werden wir das folgende Diagramm von Kategorien und Funktoren konstruieren:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Simpliziale Komplexe} & \hookrightarrow & \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xleftarrow{S(\cdot)} \end{array} & \mathbf{Top} \\ & & \uparrow \text{Vergiss} & & \\ & & \downarrow Z & & \\ & & \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{\tilde{N}} & \text{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{H_\bullet} \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Man kann zeigen, dass $|\cdot|$ und $S(\cdot)$ zueinander adjungiert sind. Man kann ferner den Begriff der Homotopie auf $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$ einführen, so dass

$$\text{Ho}(\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})) \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xleftarrow{S(\cdot)} \end{array} \text{Ho}(\mathbf{Top})$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist. Man kann außerdem \tilde{N} durch einen "Unterfunctor" N ersetzen, so dass N eine Äquivalenz von Kategorien

$$\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow[\tilde{N}]{\sim} \text{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$$

ist, wobei $\text{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$ die Kategorie der Kettenkomplexe (C, d) mit $C_n = \mathbf{0}$ für $n < 0$ ist. Es gilt dann $H_\bullet(N(A)) \cong H_\bullet(\tilde{N}(A))$ für jedes Objekt A aus $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab})$.

Definition 4.1. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation von F nach G** ist gegeben durch eine Familie

$$\tau = (\tau_X : F(X) \rightarrow G(X))_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

so dass für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ das folgende Diagramm kommutiert:

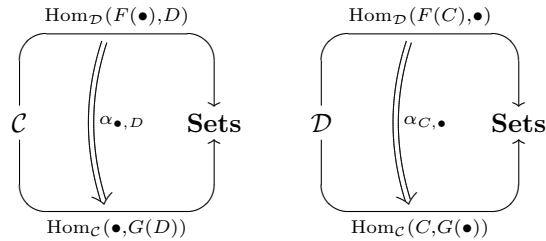
$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Man schreibt dann $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$.

Definition 4.2. Seien $F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{C}$ Funktoren. F und G heißen **adjungiert zueinander**, falls für alle $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ ein Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow[\alpha_{C,D}]{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

existiert, welcher **natürlich in C und D** ist, d.h. für jedes $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ und jedes $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ sind



natürliche Transformationen.

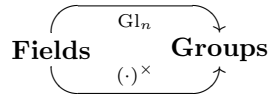
Definition 4.3. Eine natürliche Transformation $\tau = (\tau_C)$ von F nach G heißt **natürlicher Isomorphismus**, wenn τ_C für jedes Objekt C ein Isomorphismus ist (wie etwa $\alpha_{\bullet, D}$ und $\alpha_{C, \bullet}$ aus 4.2). Wir schreiben dann auch $F \underset{\tau}{\simeq} G$ bzw. $F \simeq G$.

Bemerkung. Mit der Terminologie aus 4.3 könnte man die Bedingung aus 4.2 etwas präziser formulieren als

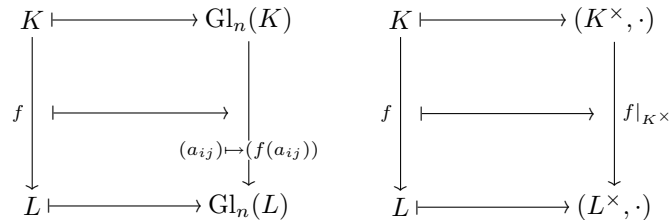
$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\bullet), D) \underset{\alpha_{\bullet, D}}{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, G(D)) \\ \wedge & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), \bullet) \underset{\alpha_{C, \bullet}}{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(\bullet)). \end{aligned}$$

Definition 4.4. Zwei Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} heißen **äquivalent**, wenn es Funktoren $F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{C}$ gibt, so dass natürliche Isomorphismen $G \circ F \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}$ existieren.

Beispiel 4.5 (zu 4.1). Betrachte die Funktoren



die definiert sind als:



Eine natürliche Transformation ist hier gegeben durch $\det_n : \text{Gl}_n(K) \rightarrow K^\times$.

Beispiel 4.6 (zu 4.2). Wir betrachten das Funktorenpaar

$$\mathbf{Sets} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]} \\ \xleftarrow{\text{Vergiss}} \end{array} \mathbf{Ab}.$$

Der Funktor, der eine Gruppe auf die zugrundeliegende Menge und Morphismen auf die zugrundeliegenden Abbildungen von Mengen schickt, wird als **Vergiss-funktor** bezeichnet (er "vergisst" die Struktur).

Weiter ist $\mathbb{Z}[X]$ die von $X \in \mathbf{Sets}$ erzeugte, freie, abelsche Gruppe. Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Mengen definiert die Vorschrift

$$\mathbb{Z}[X] \ni \sum_x n_x x \mapsto \sum_x n_x f(x) \in \mathbb{Z}[Y]$$

einen Gruppenhomomorphismus. Auf diese Weise wird $\mathbb{Z}[\cdot]$ zu einem Funktor.

Die Isomorphismen

$$\alpha_{X,A} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}[X], A) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X, \text{Vergiss}(A)) \\ \varphi & \mapsto & (x \mapsto \varphi(x)) \end{array}$$

bilden eine Adjunktion dieser Funktoren.

Beispiel 4.7 (zu 4.4). Betrachte die Kategorie \mathcal{C} mit

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = \mathbb{N} \text{ und } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(m, n) = k^{n \times m}.$$

Diese Kategorie ist äquivalent zur Kategorie **FinVec** $_k$ der endlich dimensionalen k -Vektorräume, durch das Funktorenpaar

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{k^\bullet} \\ \xleftarrow{\dim(\bullet)} \end{array} \mathbf{FinVec}_k.$$

Auf Morphismen sind die Funktoren durch die Bijektion

$$\text{hom}(V, W) \cong k^{\dim(V) \times \dim(W)}$$

gegeben. Da $\dim(\bullet) \circ k^\bullet = \text{id}$, bleibt nur noch eine natürliche Transformation $k^\bullet \circ \dim(\bullet) \simeq \text{id}$ anzugeben.

Diese ist offensichtlich, da jeder n -dimensionale k -Vektorraum natürlich isomorph zu k^n ist.

Nun kommen wir jedoch zur Definition *simplicialer Mengen*. Die meisten interessanten Räume sind triangulierbar - also reicht es, Simplicialkomplexe zu studieren. Diese sind gegeben durch ihre Ecken, Kanten, Flächen und deren Relationen zueinander (i.e., welche Ecke an einer Kante liegt, welche Kante eine Fläche begrenzt usw.). Diese Idee wird in dem Begriff einer simplicialen Menge idealisiert.

Definition 4.8. Sei Δ die folgende Kategorie:

Objekte sind die **total geordneten Mengen** $\underline{n} := \{0 < 1 < \dots < n\}$ für jedes $n \geq 0$.

Morphismen sind die monotonen Abbildungen

$$\text{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n}) := \{f : \underline{m} \rightarrow \underline{n} \mid i \leq j \in \underline{m} \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}.$$

Wir definieren für $0 \leq i \leq n$ die Abbildungen $d_i^n \in \text{Hom}_\Delta(\underline{n-1}, \underline{n})$ durch

$$d_i^n(j) := \begin{cases} j & ; j < i \\ j+1 & ; j \geq i \end{cases}$$

und $s_i^n \in \text{Hom}_\Delta(\underline{n+1}, \underline{n})$ durch

$$s_i^n(j) := \begin{cases} j & ; j \leq i \\ j-1 & ; j > i \end{cases}$$

Der Überschaubarkeit halber schreiben wir häufig einfach s_i und d_i , wenn klar ist, was gemeint ist.

Lemma 4.9 (Simpliziale Identitäten). *Es gelten die folgenden, sogenannten simplizialen Identitäten:*

$$\forall i < j : d_j^{n+1} \circ d_i^n = d_i^{n+1} \circ d_{j-1}^n \quad (1)$$

$$\forall i \leq j : s_j^{n-1} \circ s_i^n = s_i^{n-1} \circ s_{j+1}^n \quad (2)$$

$$\forall i < j : s_j^{n+1} \circ d_i^n = d_i^{n+1} \circ s_{j-1}^{n+2} \quad (3)$$

$$\forall i \in \{j, j+1\} : s_j^{n+1} \circ d_i^n = \text{id} \quad (4)$$

$$\forall i > j+1 : s_j^{n+1} \circ d_i^n = d_{i-1}^{n+1} \circ s_j^{n+2} \quad (5)$$

Bemerkung. In diesem Fall wird es beispielsweise etwas überschaubarer, wenn wir die oberen Indizes weglassen:

$$\forall i < j : d_j \circ d_i = d_i \circ d_{j-1}$$

$$\forall i \leq j : s_j \circ s_i = s_i \circ s_{j+1}$$

$$s_j \circ d_i = \begin{cases} d_i \circ s_{j-1} & ; i < j \\ \text{id} & ; i = j, j+1 \\ d_{i-1} \circ s_j & ; i > j+1 \end{cases}$$

Beweis. Die Identitäten müssen durch Ausrechnen verifiziert werden. Als abschreckendes Beispiel können wir ausrechnen, dass

$$\begin{aligned} d_j(d_i(k)) &= \begin{cases} d_i(k) & ; d_i(k) < j \\ d_i(k)+1 & ; d_i(k) \geq j \end{cases} \\ &= \begin{cases} k & = d_{j-1}(k) & ; k < i < j \\ k+1 & = d_{j-1}(k)+1 & ; i \leq k < j-1 \\ k+2 & = d_{j-1}(k)+1 & ; i \leq j-1 \leq k \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_{j-1}(k) & ; d_{j-1}(k) < i \\ d_{j-1}(k)+1 & ; d_{j-1}(k) \geq i \end{cases} = d_i(d_{j-1}(k)). \end{aligned}$$

Der Rest sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. \square

Lemma 4.10. Jede Abbildung $\alpha : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ in Δ faktorisiert eindeutig als

$$\underline{0} \longrightarrow \underline{m} \xrightarrow{\beta} \underline{k} \xleftarrow{\gamma} \underline{n} \longrightarrow \underline{0}$$

α

mit β surjektiv und γ injektiv. Weiterhin gibt es eindeutige Indizes

- $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$, so dass $\gamma = d_{j_t} \circ \dots \circ d_{j_2} \circ d_{j_1}$ und
- $0 \leq i_r < \dots < i_2 < i_1 < m$, so dass $\beta = s_{i_r} \circ \dots \circ s_{i_2} \circ s_{i_1}$.

Beweis. Wenn $\text{im}(\alpha) = \{\lambda_0 < \dots < \lambda_k\}$, so ist β eindeutig definiert durch $\alpha(i) = \lambda_{\beta(i)}$. Offensichtlich folgt aus $\lambda_{\beta(i)} = \alpha(i) = \gamma(\beta(i))$ sofort $\gamma(j) = \lambda_j$, wodurch γ eindeutig und wohldefiniert ist.

Existenz der Zerlegung für γ . Per Induktion nach k : Für $k = 0$ ist offensichtlich

$$\gamma = d_n^n \circ \dots \circ d_{\lambda_0+1}^{\lambda_0+1} \circ d_{\lambda_0-1}^{\lambda_0} \circ \dots \circ d_1^2 \circ d_0^1.$$

Sei nun $k > 0$. Wir setzen

$$M := \lambda_k \quad \text{und} \quad N := \lambda_{k-1}.$$

Wir wissen nach Induktionsannahme, dass eine Abbildung

$$\gamma' : \underline{k-1} \rightarrow \underline{N} \quad \text{mit} \quad \gamma'(i) = \lambda_i$$

existiert, welche eine Zerlegung $\gamma' = d_{j_t}^N \circ \dots \circ d_{j_1}^k$ hat. Für $i = k \geq j_1$ gilt also per Definition $d_{j_1}^{k+1}(i) = k+1$, nach der gleichen Argumentation dann $d_{j_2}^{k+2}(d_{j_1}^{k+1}(i)) = k+2$. Induktiv erhalten wir so

$$\gamma''(i) := (d_{j_t}^{N+1} \circ \dots \circ d_{j_2}^{k+2} \circ d_{j_1}^{k+1})(i) = \begin{cases} \gamma'(i) & ; \quad i \leq k-1 \\ N+1 & ; \quad i = k \end{cases}$$

und schlussendlich

$$\gamma = d_n^m \circ \dots \circ d_{M+1}^{M+1} \circ d_{M-1}^M \circ \dots \circ d_{N+1}^{N+2} \circ \gamma''.$$

Eindeutigkeit der Zerlegung von γ . Sofern γ eine Zerlegung der oben angegebenen Form hat, so muss es gerade $k-1$ Indizes geben, die unter den $\{j_i\}$ nicht vorkommen. Nach Konstruktion wissen wir bereits, dass

$$\gamma = d_n \circ \dots \circ d_{\lambda_{k+1}} \circ d_{\lambda_{k-1}} \circ \dots \circ d_{\lambda_0+1} \circ d_{\lambda_0-1} \circ \dots \circ d_1 \circ d_0.$$

eine legale Zerlegung ist. Andererseits aber ist die Abbildung durch die fehlenden Indizes jedoch bereits eindeutig festgelegt, womit auch die Zerlegung selbst eindeutig wird.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung für β lässt sich absolut analog beweisen. \square

Definition 4.11. Eine **simpliciale Menge** ist ein Funktor $X : \Delta^{\text{op}} \rightrightarrows \mathbf{Sets}$. Ein **Morphismus von simplicialen Mengen** $\varphi : X \rightarrow Y$ ist eine natürliche Transformation

$$\Delta^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{X} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{Y} \end{array} \mathbf{Sets} .$$

Wir erhalten somit eine Kategorie $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$, welche als **Kategorie der simplicialen Mengen** bezeichnet wird.

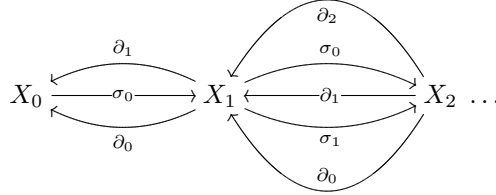
Eine simpliciale Menge X liefert die Mengen $X_n := X(\underline{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Man nennt diese Mengen die **n -Simplizes von X** .

Für jedes d_i^n erhalten wir eine Abbildung

$$X(d_i^n) : X_n \rightarrow X_{n-1}.$$

Man schreibt meist $\partial_i := \partial_i^n := X(d_i^n)$, falls X klar ist. Analog setzen wir $\sigma_i := \sigma_i^n := X(s_i^n)$. Wir nennen die ∂_i auch **Randabbildungen** und die σ_i **Degenerationsabbildungen**.

Bemerkung. Wir können also jede simpliciale Menge wie folgt graphisch darstellen:



Proposition 4.12. Jede simpliciale Menge X liefert eine eindeutige Familie von Mengen $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ zusammen mit Abbildungen

$$\partial_i^n : X_n \rightarrow X_{n-1} \quad \text{und} \quad \sigma_i^n : X_n \rightarrow X_{n+1}$$

für alle $n \geq 0$ und $0 \leq i \leq n$, so dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\forall i < j : \quad \partial_i^{n-1} \circ \partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \quad (6)$$

$$\forall i \leq j : \quad \sigma_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1} \circ \sigma_i^n \quad (7)$$

$$\forall i < j : \quad \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1} \circ \partial_i^n \quad (8)$$

$$\forall i \in \{j, j+1\} : \quad \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \text{id} \quad (9)$$

$$\forall i > j+1 : \quad \partial_i^{n+1} \circ \sigma_j^n = \sigma_j^{n-1} \circ \partial_{i-1}^n \quad (10)$$

Umgekehrt liefert jede solche Familie $\{X_n\}_{n \geq 0}$, zusammen mit entsprechenden Abbildungen ∂_i^n und σ_i^n , eine eindeutig bestimmte simpliciale Menge.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus 4.9. Sind nun $\{X_n\}_{n \geq 0}$ und Abbildungen ∂_i^n, σ_i^n mit 6 - 10 gegeben, so definieren wir $X : \Delta^{\text{op}} \rightrightarrows \mathbf{Sets}$ auf Objekten durch $X(\underline{n}) := X_n$ und auf Morphismen durch $X(d_i^n) := \partial_i^n$ bzw.

$X(s_i^n) := \sigma_i^n$. Dies genügt gemäß 4.10, da wir jeden Morphismus in Δ eindeutig als Komposition von d_i und s_i mit aufsteigenden Indizes können. Die Funktorialität folgt dann aus der verträglichkeit mit den simplizialen Identitäten. \square

Beispiel 4.13. Wir definieren eine simpliziale Menge

$$\Delta[n] : \begin{array}{ccc} \underline{k} & \longrightarrow & \text{Hom}_\Delta(\underline{k}, \underline{n}) \\ \downarrow f & \longrightarrow & \uparrow \alpha \mapsto \alpha \circ f \\ \underline{m} & \longrightarrow & \text{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n}) \end{array}$$

Mit anderen Worten, $\Delta[n](\underline{m}) = \text{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n})$ und $\Delta[n](f) = (- \circ f)$. Betrachte nun $\Delta[1]$: Es ist etwa

$$\Delta[1]_0 = \text{Hom}_\Delta(\underline{0}, \underline{1}) = \left\{ \begin{array}{c} (0 \mapsto 0), \\ a \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} (0 \mapsto 1), \\ b \end{array} \right\}$$

$$\Delta[1]_1 = \text{Hom}_\Delta(\underline{1}, \underline{1}) = \left\{ \begin{array}{c} (0 \mapsto 0), \\ (1 \mapsto 0), \\ f \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} (0 \mapsto 0), \\ (1 \mapsto 1), \\ g \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} (0 \mapsto 1), \\ (1 \mapsto 1), \\ h \end{array} \right\}$$

Wir haben $s_0 : \underline{1} \rightarrow \underline{0}$ und dessen Bild $\sigma_0 : \Delta[1]_0 \rightarrow \Delta[1]_1$. Es gilt

$$\sigma_0(a) = a \circ s_0 = f \quad \text{und} \quad \sigma_0(b) = b \circ s_0 = h$$

Die Simplizes f und h sind also im Bild von σ_0 und heißen **degeneriert**. Allgemein definiert man für eine simpliziale Menge X :

$$X_n \ni x \text{ ist } \mathbf{degeneriert} \iff \exists y \in X_{n-1}, i \leq n : x = \sigma_i(y).$$

Man überlegt sich, dass in $\Delta[1]$ alle n -Simplizes für $n \geq 2$ degeneriert sind.

Definition 4.14. Wir schreiben

$$e_i := \left(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

für den i -ten **Einheitsvektor**. Definiere dann den n -dimensionalen **topologischen Standardsimplex** $\Delta_{\text{top}}^n := \overline{(e_0, \dots, e_n)}$. Nach Definition 1.1 können wir auch

$$\Delta_{\text{top}}^n = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mid \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

schreiben. Für jedes $f \in \text{Hom}_\Delta(\underline{m}, \underline{n})$ definiere weiterhin

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \Delta_{\text{top}}^m & \longrightarrow & \Delta_{\text{top}}^n \\ (\lambda_i)_i & \longmapsto & \left(\sum_{f(j)=i} \lambda_j \right)_i \end{array}$$

Mit $\Delta_{\text{top}}^f := \tilde{f}$ wird $\Delta_{\text{top}}^\bullet : \Delta \rightrightarrows \mathbf{Top}$ zu einem Funktor.

Beispiel 4.15. Die Abbildung $d_0^1 : \Delta_{\text{top}}^0 \rightarrow \Delta_{\text{top}}^1$ bildet $e_0 = (1)$ auf

$$\left(\sum_{d_0^1(j)=0} (e_0)_j, \sum_{d_0^1(j)=1} (e_0)_j \right) = (0, 1)$$

ab. Das Bild unter \tilde{d}_1^1 wäre dementsprechend $(1, 0)$.

Definition 4.16. Sei X eine simpliziale Menge. Dann definiert man einen topologischen Raum

$$|X| := \coprod_{n \geq 0} (X_n \times \Delta_{\text{top}}^n) / \sim$$

wobei X_n mit der diskreten Topologie versehen und die Äquivalenzrelation " \sim " gegeben ist durch $(x, \tilde{f}(p)) \sim (X(f)(x), p)$ für alle $f \in \text{Hom}(\underline{m}, \underline{n})$, $x \in X_n$ und $p \in \Delta_{\text{top}}^m$.

Man nennt $|X|$ die **geometrische Realisierung von X** .

Lemma 4.17. 1. Die geometrische Realisierung lässt sich zu einem Funktor

$$|\cdot| : \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets}) \rightrightarrows \mathbf{Top}$$

erweitern.

2. Falls $x = \sigma_i^n(y)$ ein degenerierter Simplex ist, so wird $(x, \Delta_{\text{top}}^{n+1})$ in $|X|$ mit $(y, \Delta_{\text{top}}^n)$ identifiziert.

Beweis. Zu 1. Ein Morphismus $X \xrightarrow{\tau} Y$ in $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$ ist eine natürliche Transformation $\{\tau_n : X_n \rightarrow Y_n\}$. Diese induziert eine Abbildung $\tau' := \coprod_n (\tau_n \times \text{id})$, welche aufgrund der Natürlichkeit von τ die Eigenschaft hat, in $|X|$ äquivalente Elemente auf äquivalente Elemente in $|Y|$ abzubilden:

$$(\tau(x), \tilde{f}(p)) \sim (Y(f)(\tau(x)), p) = (\tau(X(f)(x)), p).$$

Also induziert τ' eine Abbildung $|\tau| : |X| \rightarrow |Y|$. Die Funktorialität dieser Definition ist offensichtlich.

Zum Beweis von 2 müssen wir lediglich bemerken, dass per Definition

$$\forall p \in \Delta_{\text{top}}^{n+1} : (x, p) = (\sigma_i^n(y), p) = (X(s_i^n)(y), p) \sim (y, \tilde{s}_i^n(p))$$

gilt. Da \tilde{s}_i^n surjektiv ist, folgt daraus die Aussage. \square

Bemerkung. Insbesondere können wir folgern, dass $|X|$ ein CW-Komplex ist.

Beispiel 4.18. Es ist

$$|\Delta[n]| \cong \Delta_{\text{top}}^n,$$

wir besprechen den Fall $n = 1$ ausführlich.

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in 4.13, d.h. $\Delta[1]$ hat die 0-Simplizes $a = (0 \mapsto 0)$ und $b = (0 \mapsto 1)$ sowie die 1-Simplizes $f = \sigma_0(a)$,

$g = \text{id}_{\underline{1}}$ und $h = \sigma_0(b)$. Da alle n -Simplizes mit $n \geq 2$ degeneriert sind, tragen sie gemäß 4.17 (2) nicht zur Topologie von $|\Delta[1]|$ bei.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass $a = \partial_1(g)$ und $b = \partial_0(g)$. Gemäß Definition von " \sim " und nach 4.15 sind also

$$\begin{aligned} (a, e_0) &\sim (g, \tilde{d}_1^1(e_0)) = (g, (1, 0)) \quad \text{und} \\ (b, e_0) &\sim (g, \tilde{d}_0^1(e_0)) = (g, (0, 1)) \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned} |\Delta[1]| &= (\{a, b\} \times \Delta_{\text{top}}^0) \amalg (\{f, g, h\} \times \Delta_{\text{top}}^1) / \sim \\ &\cong \{(a, e_0), (b, e_0)\} \amalg (\{g\} \times \Delta_{\text{top}}^1) / \sim \\ &\cong \{g\} \times \Delta_{\text{top}}^1 \cong \Delta_{\text{top}}^1. \end{aligned}$$

Natürlich kann man in Definition 4.11 die Kategorie **Sets** durch eine beliebige andere Kategorie \mathcal{C} ersetzen und erhält so **die Kategorie der simplizialen Objekte in \mathcal{C}** . Die folgende Definition ist ein weiterer Spezialfall.

Definition 4.19. Eine **simpliziale abelsche Gruppe** ist ein Funktor

$$\Delta^{\text{op}} \rightrightarrows \mathbf{Ab}.$$

Ein **Morphismus von simplizialen abelschen Gruppen** $A \xrightarrow{\varphi} B$ ist eine natürliche Transformation

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \Delta^{\text{op}} \swarrow & \Downarrow \varphi & \searrow \mathbf{Ab} \\ & B & \end{array}$$

Wir schreiben $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab})$ für diese Kategorie.

Die obigen Aussagen über $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$ gelten sinngemäß auch für $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab})$, insbesondere 4.12.

Bemerkung 4.20. Der Funktor $\mathbb{Z}[\cdot]$ aus 4.2 induziert einen Funktor

$$Z : \Delta^{\text{op}}\mathbf{Sets} \rightrightarrows \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab}$$

durch Komposition von Funktoren;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}[\cdot] \circ X \\ \downarrow (\varphi_n) & \xrightarrow{\quad} & \downarrow (\mathbb{Z}[\varphi_n]) \\ Y & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}[\cdot] \circ Y \end{array}$$

Analog induziert der Vergissfunktork $\mathbf{Ab} \rightrightarrows \mathbf{Sets}$ durch Komposition einen Funktor $\Delta^{\text{op}}\mathbf{Ab} \rightrightarrows \Delta^{\text{op}}\mathbf{Sets}$.

Sei nun A eine simpliziale abelsche Gruppe. Nach der entsprechenden Variante von 4.8 und 4.12 gibt es Abbildungen

$$\partial_i^n : A_n \rightarrow A_{n-1}$$

für $0 \leq i \leq n$, welche Homomorphismen von abelschen Gruppen sind.

Definition 4.21. Für jede simpliziale abelsche Gruppe A definiert man $\tilde{N}(A)$ als die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}^A} A_n \xrightarrow{d_n^A} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^A} A_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}^A} \cdots$$

wobei $d_n^A := \sum_{i=0}^n (-1)^i A(d_i^n)$.

Fakt 4.22. \tilde{N} lässt sich zu einem Funktor

$$\tilde{N} : \Delta^{\text{op}} \mathbf{Ab} \Rightarrow \text{Ch}(\mathbf{Ab})$$

fortsetzen.

Beweis. Zunächst müssen wir $d_{n-1} \circ d_n = \mathbf{0}$ für alle n zeigen. Der Beweis verläuft analog zu 3.2.

Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Morphismus in $\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab})$, so ist φ eine natürliche Transformation, gegeben durch eine Familie von Abbildungen

$$\tilde{N}(A)_n = A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n = \tilde{N}(B)_n,$$

welche insbesondere das folgende Diagramm kommutieren lassen

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\varphi_n} & B_n \\ A(d_i^n) \downarrow & & \downarrow B(d_i^n) \\ A_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & B_{n-1} \end{array}$$

. Da Verkettung von Morphismen in \mathbf{Ab} bilinear ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} d_n^B \circ \varphi_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (B(d_i^n) \circ \varphi_n) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\varphi_{n-1} \circ A(d_i^n)) = \varphi_{n-1} \circ d_n^A \end{aligned}$$

was beweist, dass $\varphi = (\varphi_n)$ bereits eine Kettenabbildung ist. Da \tilde{N} auf Morphismen also im Grunde die Identität ist, ist Funktorialität offensichtlich. \square

Damit haben wir jetzt folgende Funktoren:

$$\Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets}) \xrightarrow[\text{(4.20)}]{Z} \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow[\text{(4.22)}]{\tilde{N}} \text{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{H_\bullet} \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}} \quad (11)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\tilde{C}_*}$$

wobei wir $\tilde{C}_* := \tilde{N} \circ Z$ definieren. Diese Komposition ist der simplizialen Homologie sehr ähnlich.

5 Singuläre Homologie

Im Folgenden seien topologische Räume stets lokal-kompakt und Hausdorffsch. Wir setzen auch $\text{Hom} := \text{Hom}_{\mathbf{Top}}$, für die Morphismenmengen anderer Kategorien wird weiterhin ein Index verwendet.

Definition 5.1. Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$, dann setzen wir

$$S_n(X) := \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, X) \in \text{Ob}(\mathbf{Sets}).$$

Fakt 5.2. Die S_n induzieren einen Funktor

$$S : \mathbf{Top} \rightrightarrows \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets})$$

Konstruktion. Für $X \in \text{Ob}(\mathbf{Top})$ definieren wir $S(X) : \Delta^{\text{op}} \rightrightarrows \mathbf{Sets}$ als den Funktor

$$S(X) := (\text{Hom}(\bullet, X) \circ \Delta_{\text{top}}^\bullet)^{\text{op}}.$$

Mit anderen Worten:

$$S(X) : \begin{array}{ccc} \underline{n} & \longrightarrow & S_n(X) = \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, X) \\ \downarrow f & \longrightarrow & \uparrow (\alpha \mapsto \alpha \circ \tilde{f}) \\ \underline{m} & \longrightarrow & S_m(X) = \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^m, X) \end{array}$$

Es bleibt noch S auf Morphismen zu definieren. Sei also $\varphi : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann erhalten wir durch Nachschalten von φ eine natürliche Transformation $S(X) \simeq S(Y)$: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(X)(\underline{n}) = \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, X) & \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha \circ \tilde{f}} & \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^m, X) = S(X)(\underline{m}) \\ \downarrow \alpha \mapsto \varphi \circ \alpha & & \downarrow \gamma \mapsto \varphi \circ \gamma \\ S(Y)(\underline{n}) = \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, Y) & \xrightarrow{\beta \mapsto \beta \circ \tilde{f}} & \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^m, Y) = S(Y)(\underline{m}) \end{array}$$

kommutiert offensichtlich für alle $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$. □

Definition 5.3. Wir können nun unsere Funktorenkette (11) erweitern zu

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{S} \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Sets}) \xrightarrow[\text{(4.20)}]{Z} \Delta^{\text{op}}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow[\text{(4.22)}]{\tilde{N}} \text{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{H_\bullet} \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}} \quad (12)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{C_\bullet}$ \tilde{C}_\bullet

wobei wir $C_\bullet := \tilde{C}_\bullet \circ S$ setzen. Der Kettenkomplex $C_\bullet(X)$ heißt **der singuläre Kettenkomplex von X** . Wir schreiben

$$C_n(X) := C_\bullet(X)_n, Z_n(X) := Z_n(C_\bullet(X)) \text{ und } B_n(X) := B_n(C_\bullet(X)).$$

Für einen topologischen Raum X definieren wir $H_\bullet(X) := H_\bullet(C_\bullet(X))$ und nennen dies die **singuläre Homologie von X** . Insbesondere heißt $H_n(X)$ die **n -te singuläre Homologiegruppe von X** .

Bemerkung. Die entscheidende Idee ist Definition 5.1. Man betrachtet nicht eine fest gewählte Triangulierung von X , sondern *alle* Abbildungen $\Delta_{\text{top}}^n \rightarrow X$ für alle n , also gewissermaßen alle Triangulierungen gleichzeitig.

Vorteile. Unter anderem:

- $H_\bullet(\cdot)$ ist unabhängig von der Triangulierung.
- $H_\bullet(\cdot)$ ist ein Funktor, alles ist natürlich.
- Die Existenz einer Triangulierung spielt keine Rolle, bzw. ist nicht erforderlich.

Dies führte zu der inzwischen widerlegten Vermutung, dass zwei verschiedene Triangulierungen eines "vernünftigen" topologischen Raums immer eine gemeinsame Verfeinerung besäßen.

Lemma 5.4. $H_\bullet : \mathbf{Top} \Rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ und $H_n : \mathbf{Top} \Rightarrow \mathbf{Ab}$ sind Funktoren. □

Bemerkung 5.5. Es wird sich später herausstellen, dass für jeden Simplicialkomplex K die singuläre Homologie seiner geometrischen Realisierung und seine simpliciale Homologie übereinstimmen: $H_\bullet(K) \cong H_\bullet(|K|)$.

Proposition 5.6. Sei $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist der von f induzierte Homomorphismus

$$f_\bullet := H_\bullet(f) : H_\bullet(X) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(Y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Dies folgt nun direkt aus 5.4. □

Proposition 5.7. Sei $X = \coprod_{i \in I} X_i$ eine Zerlegung eines topologischen Raums X in seine Wegzusammenhangskomponenten. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_\bullet(X_i) \xrightarrow[\cong]{H_\bullet(\bigoplus_i l_i)} H_\bullet(X).$$

wobei $l_i : X_i \hookrightarrow X$ die Inklusion ist.

Beweis. Es gilt

$$\text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, X) = \text{Hom}\left(\Delta_{\text{top}}^n, \prod_i X_i\right) = \prod_i \text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, X_i).$$

Daraus folgt nun $S(X) = \coprod_i S(X_i)$ und damit aufgrund der Funktorialität auch

$$C_\bullet(X) = \tilde{C}_\bullet(S(X)) = \bigoplus_i \tilde{C}_\bullet(S(X_i)) = \bigoplus_i C_\bullet(X_i),$$

bzw. $H_\bullet(X) \cong \bigoplus_i H_\bullet(X_i)$. \square

Lemma 5.8 (Dimensionsaxiom). *Es gilt*

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad n = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Beweis. Da $\{*\}$ Finalobjekt in **Top** ist, sind die Mengen $\text{Hom}(\Delta_{\text{top}}^n, \{*\})$ für jedes $n \geq 0$ ebenfalls einelementig. Damit gilt

$$\forall n \geq 0 : Z(S_n(\{*\})) \cong \mathbb{Z} \text{ und } S(\{*\})(d_i^n) = \text{id}.$$

Dies bedeutet, dass für den Kettenkomplex $C := C_\bullet(\{*\})$ das Differential im Grad $n > 0$ gegeben ist durch

$$d_n^C = \sum_{i=0}^n (-1)^i S(\{*\})(d_i^n) = \begin{cases} \mathbf{0} & ; \quad n \text{ ungerade} \\ -\text{id} & ; \quad n \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit ist C von der Form

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{-\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbb{Z} = C_0 \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{0}} \cdots$$

und wie in Beispiel 2.6 lässt sich nun die Aussage einfach nachweisen. \square

Proposition 5.9. *Sei X wegzusammenhängend. Der Auswertungshomomorphismus $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 0}$, definiert als*

$$\varepsilon_n : \begin{array}{ccc} C_n(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sum_i k_i \sigma_i & \longmapsto & \sum_i k_i \end{array}$$

induziert einen Isomorphismus $\bar{\varepsilon}_X : H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir schreiben $\bar{\varepsilon} := \bar{\varepsilon}_X$. Es ist

$$H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = C_0(X)/B_0(X).$$

Um zu zeigen, dass $\bar{\varepsilon}$ wohldefiniert ist, müssen wir zunächst $\varepsilon(B_0(X)) = \mathbf{0}$ verifizieren. Die abelsche Gruppe $B_0(X)$ besteht aus Elementen der Form

$$d_1 \left(\sum_{i=0}^m k_i y_i \right) = \sum_{i=0}^m k_i d_1(y_i) \text{ mit } y_i : \Delta_{\text{top}}^n \rightarrow X$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\sum_i k_i \cdot d_1(y_i) \right) &= \sum_i k_i \cdot \varepsilon(d_1(y_i)) = \sum_i k_i \cdot \varepsilon(y_i(1) - y_i(0)) \\ &= \varepsilon \left(\sum_i k_i \cdot (y_i(1) - y_i(0)) \right) = \sum_i (k_i - k_i) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\bar{\varepsilon}$ zumindest wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass ε ein Isomorphismus ist. Wir wählen dazu einen Punkt $x \in X$.

Surjektivität. Die Abbildung $\bar{\varepsilon}$ ist sicherlich surjektiv, da ε_0 es ist: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\varepsilon_0(n \cdot x) = n$.

Injektivität. Sei $c \in \ker \varepsilon_0 \subseteq C_0(X)$, also $c = \sum_i k_i y_i$ mit $\sum_i k_i = 0$. Wähle nun 1-Simplizes

$$\lambda_i : \Delta_{\text{top}}^1 \cong [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \lambda_i(0) = x \text{ und } \lambda_i(1) = y_i.$$

Dies ist möglich, da X wegzusammenhängend ist. Es gilt nun

$$\begin{aligned} c - d_1 \left(\sum_i k_i y_i \right) &= \left(\sum_i k_i y_i \right) - \left(\sum_i k_i d_1(y_i) \right) \\ &= \sum_i k_i (y_i - y_i + x) = \left(\sum_i k_i \right) \cdot x = 0, \end{aligned}$$

also $c = d_1 \left(\sum_i k_i y_i \right) \in B_0(X)$. Also ist $\ker(\varepsilon_0) \subseteq B_0(X)$ und demnach $\bar{\varepsilon}$ injektiv. \square

Korollar 5.10. Sei X ein topologischer Raum. Dann haben wir einen Isomorphismus

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{i \in \pi_0(X)} \mathbb{Z}.$$

Mit anderen Worten: $H_0(X)$ ist die freie abelsche Gruppe, erzeugt von den Wegzusammenhangskomponenten von X .

Beweis. Dies folgt direkt aus 5.7 und 5.9. \square

6 H_1 und π_1

Im Folgenden sei X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt. Wir schreiben $\mathbb{I} := [0, 1]$ und bezeichnen mit

$$\Omega(X, x_0) = \{ f : \mathbb{I} \rightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0 \}$$

den Schleifenraum von (X, x_0) , so dass $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \simeq$ (modulo Homotopie) gilt. Wir bezeichnen mit \odot die Komposition von Schleifen in $\Omega_1(X, x_0)$.

Definition 6.1. Sei G eine Gruppe. Dann ist $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ mit

$$[G, G] = \{ aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \}.$$

G^{ab} ist abelsch und hat die folgende universelle Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & G^{\text{ab}} \\ & \searrow \forall f & \swarrow \exists \\ & & A \end{array}$$

Mit anderen Worten, $(\bullet)^{\text{ab}}$ ist linksadjungiert zu Vergiss : $\mathbf{Ab} \rightrightarrows \mathbf{Grp}$.

Notation. Wir bezeichnen von nun an mit

$$\Omega(X, x_0) \xrightarrow{[\cdot]_{\pi}} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{[\cdot]_{\text{ab}}} \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$

die kanonischen Projektionen, d.h. für $f \in \Omega(X, x_0)$ etwa ist $[f]_{\pi} \in \pi_1(X, x_0)$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Weiterhin schreiben wir

$$[\cdot]_{\pi, \text{ab}} := [\cdot]_{\text{ab}} \circ [\cdot]_{\pi}.$$

Dementsprechend bezeichnen wir auch für $c \in C_1(X)$ mit $[c]_1 \in H_1(X)$ die zugehörige Äquivalenzklasse in der ersten Homologiegruppe.

Proposition 6.2. Sei $\psi : \Delta_{\text{top}}^1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ ein Homöomorphismus. Dann induziert die Vorschrift

$$\Omega(X, x_0) \ni f \mapsto f \circ \psi \in C_1(X)$$

einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$.

Bemerkung. Mit anderen Worten: Die Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$ ist verträglich mit der auf $H_1(X)$, einfach indem wir Schleifen als die entsprechende Abbildung $\Delta_{\text{top}}^1 \rightarrow X$ auffassen.

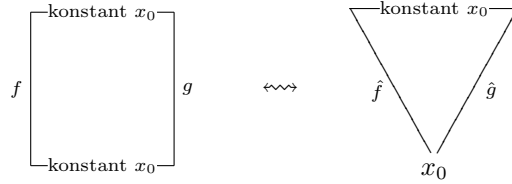
Beweis. Wir schreiben $\hat{f} := f \circ \psi$. Wir werden zunächst zeigen, dass α existiert und wohldefiniert ist. Anschließend zeigen wir, dass α ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wohldefiniertheit. Es ist

$$d_1(f \circ \psi) = \partial_0^1(f \circ \psi) - \partial_1^1(f \circ \psi) = x_0 - x_0 = 0,$$

d.h. $f \circ \psi \in Z_1(X)$. Also ist $f \circ \psi$ Repräsentant einer Äquivalenzklasse in $H_1(X)$. Weiterhin müssen wir verifizieren, dass für $[f]_\pi = [g]_\pi$ auch $[\hat{f}]_1 = [\hat{g}]_1$ gilt, damit α wohldefiniert ist.

Gemäß Definition gibt es in diesem Fall eine Homotopie $F : \mathbb{I}^2 \rightarrow X$ zwischen f und g rel. $\partial\mathbb{I} = \{0, 1\}$. Da $F|_{\mathbb{I} \times \{0\}} \equiv x_0$, können wir $\mathbb{I} \times \{0\}$ kontrahieren und erhalten eine von F induzierte Abbildung $\sigma : \Delta_{\text{top}}^2 \rightarrow X$. Insbesondere kann diese Kontraktion so vorgenommen werden, dass sie auf $\{0\} \times \mathbb{I} = \mathbb{I}$ und $\{1\} \times \mathbb{I} = \mathbb{I}$ mit ψ übereinstimmt. Graphisch lässt sich dies wie folgt beschreiben:



Sei $c_n : \Delta_{\text{top}}^n \rightarrow X$ die Abbildung, die konstant gleich x_0 ist, dann erhalten wir für $\sigma \in C_2(X)$:

$$d_2(\sigma) = \partial_0^2(\sigma) - \partial_1^2(\sigma) + \partial_2^2(\sigma) = \hat{c}_1 - \hat{g} + \hat{f}$$

Der 1-Simplex \hat{c}_1 ist Rand, da $\hat{c}_1 = d_2(\hat{c}_2)$ gilt. Demnach ist nun $[\hat{f} - \hat{g}]_1 = 0$ und folglich α wohldefiniert.

Struktur. Wir wollen nun zeigen, dass α ein Gruppenhomomorphismus ist. Das nachfolgenden Lemma 6.3 besagt für $[f]_\pi, [g]_\pi \in \pi_1(X, x_0)$ nun

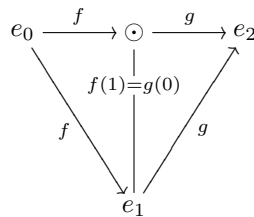
$$[\hat{f}]_1 + [\hat{g}]_1 = [\widehat{f \odot g}]_1,$$

d.h. $\alpha(f \odot g) = \alpha(f) + \alpha(g)$. □

Lemma 6.3. 1. Seien f und g Wege in X mit $f(1) = g(0)$. Dann ist das Element $f \odot g - f - g \in C_1(X)$ ein Rand.

2. Sei f ein Weg in X . Dann ist $f + f^{-1} \in C_1(X)$ ein Rand. Hier bedeutet f^{-1} , dass f in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen wird.

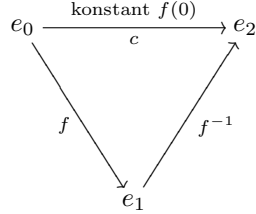
Beweis. Zum Beweis von 1 betrachten wir das folgende 2-Simplex σ ,



wobei wir die Abbildung im Inneren entlang der Vertikalen konstant fortsetzen. Dann ist

$$d_2(\sigma) = \partial_0^2(\sigma) - \partial_1^2(\sigma) + \partial_2^2(\sigma) = g - (f \odot g) + f$$

und demnach $d_2(-\sigma) = f \odot g - g - f$ wie gewünscht. Für den Beweis von 2 betrachten wir das folgende 2-Simplex τ :



welches wir im Inneren leicht stetig fortsetzen können. Es gilt nun

$$d_2(\tau) = f^{-1} - c + f$$

und da c Rand ist (als Bild des 2-Simplex, der ebenfalls konstant auf $f(0)$ abbildet), folgt somit auch, dass $f^{-1} + f$ Rand ist. \square

Theorem 6.4. Sei X wegzusammenhängend. Die von α (aus 6.2) gemäß 6.1 induzierte Abbildung

$$\bar{\alpha} : \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen.

Beweis. Wir wollen ein Inverses $\bar{\beta}$ konstruieren. Dazu definieren wir zunächst eine Abbildung

$$\beta : C_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$

wie folgt: Wähle zunächst für jeden Punkt $x \in X$ einen Weg $\lambda_x : \mathbb{I} \rightarrow X$ von $\lambda_x(0) = x_0$ nach $\lambda_x(1) = x$, wobei λ_{x_0} der konstante Weg sei. Für $\hat{f} : \Delta_{\text{top}}^1 \rightarrow X$ definieren wir nun

$$\beta(\hat{f}) := \left[\lambda_{f(0)} \odot \hat{f} \odot \lambda_{f(1)}^{-1} \right]_{\pi, \text{ab}}$$

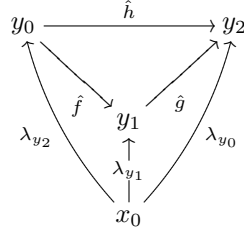
Da $C_1(X)$ frei abelsch von solchen f erzeugt ist, definiert dies β .

Lemma 6.5. Es gilt $\beta(B_1(X)) = \mathbf{0}$, d.h. β induziert eine Abbildung

$$\bar{\beta} : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}.$$

Beweis. Sei $\sigma : \Delta_{\text{top}}^2 \rightarrow X$ ein 2-Simplex mit $y_i := \sigma(e_i)$ und $\hat{g} := \partial_0^2(\sigma)$, $\hat{h} := \partial_1^2(\sigma)$ und $\hat{f} := \partial_2^2(\sigma)$.

Graphisch:



Dann ist offenbar $f \odot g \odot h^{-1} \simeq \lambda_{x_0}$ nullhomotop und demnach

$$\begin{aligned} \beta(d_2(\sigma)) &= \beta(\hat{g} - \hat{h} + \hat{f}) = \beta(\hat{f} + \hat{g} - \hat{h}) \\ &= [\lambda_{y_0} \odot f \odot \lambda_{y_1}^{-1} \odot \lambda_{y_1} \odot g \odot \lambda_{y_2}^{-1} \odot \lambda_{y_2} \odot h^{-1} \odot \lambda_{y_0}^{-1}]_{\pi, \text{ab}} \\ &= [\lambda_{y_0} \odot f \odot g \odot h^{-1} \odot \lambda_{y_0}^{-1}]_{\pi, \text{ab}} = [\lambda_{y_0} \odot \lambda_{y_0}^{-1}]_{\pi, \text{ab}} = 0 \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. \square

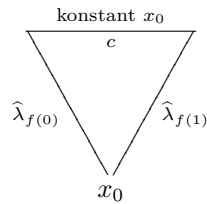
Wir fahren nun mit dem Beweis von 6.4 fort. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\bar{\beta}$ ein Inverses zu $\bar{\alpha}$ ist. Offenbar ist

$$\bar{\beta}(\bar{\alpha}([f]_{\pi, \text{ab}})) = \bar{\beta}([\hat{f}]_1) = [\lambda_{x_0} \odot f \odot \lambda_{x_0}^{-1}]_{\pi, \text{ab}} = [f]_{\pi, \text{ab}}$$

und andererseits auch

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\bar{\beta}([\hat{f}]_1)) &= \bar{\alpha}([\lambda_{f(0)} \odot f \odot \lambda_{f(1)}^{-1}]) = [\hat{\lambda}_{f(0)} + \hat{f} - \hat{\lambda}_{f(1)}]_1 \\ &= [\hat{f}]_1 + [\hat{\lambda}_{f(0)} - \hat{\lambda}_{f(1)}]_1. \end{aligned}$$

Es genügt also, zu zeigen, dass $\hat{\lambda}_{f(0)} - \hat{\lambda}_{f(1)}$ Rand ist. Dazu betrachten wir das 2-Simplex τ :



Es ist einfach einzusehen, dass die konstante Abbildung c ein Rand ist (siehe etwa 6.2), womit wir wegen $d_2(\tau) = \hat{\lambda}_{f(0)} - \hat{\lambda}_{f(1)} + c$ fertig sind. \square

Korollar 6.6. Aus 6.4 folgen nun die folgenden Identitäten:

1. $H_1(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1) \cong H_1((\mathbb{S}^1)^n) \cong \mathbb{Z}^n$
2. $H_1(\{*\}) \cong \mathbf{0}$
3. $H_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2$ für $n \geq 2$

\square

Bemerkung 6.7. Beispiel 3 aus 6.6 zeigt, dass es topologische Räume X gibt, so dass $H_\bullet(X)$ Torsion hat, obwohl $C_\bullet(X)$ frei abelsch ist.

Man muss also nicht nur $B_n(X)$ und $Z_n(X)$ bestimmen, sondern immer auch die Inklusion $B_n(X) \hookrightarrow Z_n(X)$.

7 Homotopieinvarianz singulärer Homologie

Size, really doesn't matter.

Wir benötigen zunächst etwas homologische Algebra.

Definition 7.1. Seien $f, g : C \rightarrow D$ zwei Abbildungen von Kettenkomplexen. Dann heißen f und g **kettenhomotop** (oder einfach **homotop**), falls es für jedes $q \in \mathbb{Z}$ Abbildungen $F_q : C_q \rightarrow D_{q+1}$ gibt, so dass

$$d_{q+1}^D \circ F_q + F_{q-1} \circ d_q^C = f_q - g_q.$$

Wir schreiben dann auch $f \underset{F}{\simeq} g$ oder einfach $f \simeq g$. Graphisch:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{q+1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_{q+1}} \\ \xrightarrow{g_{q+1}} \end{array} & D_{q+1} \\
 \downarrow d_{q+1}^C & \nearrow F_q & \downarrow d_{q+1}^D \\
 C_q & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_q} \\ \xrightarrow{g_q} \end{array} & D_q \\
 \downarrow d_q^C & \nearrow F_{q-1} & \downarrow d_q^D \\
 C_{q-1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_{q-1}} \\ \xrightarrow{g_{q-1}} \end{array} & D_{q-1} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Lemma 7.2. Zwei kettenhomotope Abbildungen $f \underset{F}{\simeq} g$ wie in 7.1 induzieren die gleiche Abbildung

$$H_\bullet(f) = H_\bullet(g) : H_\bullet(C) \rightarrow H_\bullet(D).$$

in der Homologie.

Beweis. Sei $z \in Z_n(C)$ ein Zyklus. Dann ist

$$f_n(z) - g_n(z) = d_{n+1}^D(F_n(z)) + F_{n-1}(d_n^C(z)) = d_{n+1}^D(F_n(z)) \in B_n(D)$$

ein Rand, also $H_n(f) = H_n(g)$. \square

Definition 7.3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $p \in A$ ein Punkt. Für $\sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow A$ definieren wir eine Abbildung $p_*\sigma : \Delta_{\text{top}}^{q+1} \rightarrow A$ wie folgt.

Sei $y = (t, \lambda_1, \dots, \lambda_{q+1}) \in \Delta_{\text{top}}^{q+1}$ ein Punkt. Wir setzen $\mu_i := \frac{\lambda_{i+1}}{1-t}$ für $0 \leq i \leq q$. Somit ist also $\sum_i \mu_i = 1$ und damit $x := (\mu_0, \dots, \mu_q) \in \Delta_{\text{top}}^q$. Darüber hinaus ist $y = t \cdot e_0 + (1-t) \cdot \tilde{d}_0^{q+1}(x)$, und jedes $y \in \Delta_{\text{top}}^{q+1}$ hat eine solche Darstellung. Damit sind wir nun in der Lage, $p_*\sigma$ zu definieren:

$$p_*\sigma \left(t \cdot e_0 + (1-t) \cdot \tilde{d}_0^{q+1}(x) \right) := t \cdot p + (1-t) \cdot \sigma(x)$$

Dies wiederum liefert eine Abbildung

$$p_*(\bullet) : C_q(A) \rightarrow C_{q+1}(A).$$

Bemerkung. Anschaulich gesehen wird ein q -Simplex σ durch p_* stetig zu einem $(q+1)$ -Simplex erweitert, indem p als nächste Ecke hinzugenommen wird. Auf Δ_{top}^q stimmen $p_*\sigma$ und σ überein.

Lemma 7.4. Für $c \in C_q(A)$ gilt

$$d_{q+1}(p_*(c)) = \begin{cases} c - p_*(d_q(c)) & ; \quad q > 0 \\ c - \varepsilon(c) \cdot p & ; \quad q = 0 \end{cases}$$

wobei ε der Auswertungshomomorphismus aus 5.9 ist.

Beweis. Es genügt wie üblich, Erzeuger $\sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow A$ zu betrachten. Im Fall $q = 0$ ist $\sigma \equiv q$ ein einzelner Punkt und $p_*(\sigma) : \Delta_{\text{top}}^1 \rightarrow A$ ein Weg von p nach q , also

$$d_1(p_*\sigma) \equiv q - p = \sigma - \varepsilon(\sigma) \cdot p.$$

Sei nun $q \geq 1$. Es ist $p_*\sigma \circ \tilde{d}_0^{q+1} = \sigma$, wie wir bereits in 7.3 bemerkt hatten. Wir behaupten nun weiterhin, dass für $i > 0$

$$p_*\sigma \circ \tilde{d}_i^{q+1} = p_*(\sigma \circ \tilde{d}_{i-1}^q) \tag{13}$$

gilt. Um dies einzusehen, sei

$$y = t \cdot e_0 + (1-t) \cdot \tilde{d}_0^q(x) \in \Delta_{\text{top}}^q$$

ein beliebiger Punkt. Dann folgt aus der simplizialen Identität 1 (siehe 4.9):

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^{q+1}(y) &= t \cdot e_0 + (1-t) \cdot \tilde{d}_i^{q+1}(\tilde{d}_0^q(x)) \\ &= t \cdot e_0 + (1-t) \cdot \tilde{d}_0^{q+1}(\tilde{d}_{i-1}^q(x)) \end{aligned}$$

und demzufolge

$$p_*(\sigma \circ \tilde{d}_{i-1}^q)(y) = t \cdot p + (1-t) \cdot \sigma(\tilde{d}_{i-1}^q(x)) = p_*(\sigma)(\tilde{d}_i^{q+1}(y)).$$

Wir erinnern uns nun an 4.21 und daran, dass die simpliziale Menge $S(A)$ auf Morphismen durch Nachschalten definiert ist. Dann folgt aus (13) nun

$$\begin{aligned} d_{q+1}(p_*\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \cdot (p_*\sigma \circ \tilde{d}_i^{q+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i \cdot (p_*(\sigma \circ \tilde{d}_{i-1}^q)) + \sigma \\ &= \sigma - p_* \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot (\sigma \circ \tilde{d}_i^q) \right) = \sigma - p_*(d_q(\sigma)), \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. \square

Proposition 7.5. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe, nicht-leere Menge. Dann gilt*

$$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad n = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Beweis. Sei $c \in Z_q(A)$ für $q > 0$. Aus 7.4 folgt $c = d_{q+1}(p_*c)$ für ein beliebiges $p \in A$, da $p_*(d_q(c)) = \mathbf{0}$. Also $c \in B_q(A)$ und folglich $H_q(A) = \mathbf{0}$. Der Fall $q = 0$ folgt aus 5.9. \square

Theorem 7.6 (Homotopieinvarianz von H_\bullet). *Seien $f \simeq g : X \rightarrow Y$ zwei stetige, homotope Abbildungen. Dann induzieren sie die gleiche Abbildung*

$$H_\bullet(f) = H_\bullet(g) : H_\bullet(X) \rightarrow H_\bullet(Y)$$

in der Homologie.

Korollar 7.7. *Ist $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ eine Homotopieäquivalenz, so induziert sie einen Isomorphismus*

$$H_\bullet(f) : H_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(Y)$$

der entsprechenden Homologien.

Beweis des Korollars. Nach Annahme existiert $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, d.h. gemäß 5.7 erhalten wir

$$H_\bullet(\text{id}_X) = H_\bullet(g \circ f) = H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f)$$

und durch ein äquivalentes Argument auch $H_\bullet(\text{id}_Y) = H_\bullet(f) \circ H_\bullet(g)$. \square

Beweis von Theorem 7.6. Betrachte die Einbettungen

$$\begin{aligned} i_0^X : X &\hookrightarrow X \times \{0\} \hookrightarrow X \times \mathbb{I} \\ i_1^X : X &\hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow X \times \mathbb{I} \end{aligned}$$

Da C_\bullet ein Funktor ist, kommutiert dann für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und für $j \in \{0, 1\}$ das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(X) & \xrightarrow{C_\bullet(i_j^X)} & C_\bullet(X \times \mathbb{I}) \\ C_\bullet(f) \downarrow & & \downarrow C_\bullet(f \times \text{id}_\mathbb{I}) \\ C_\bullet(Y) & \xrightarrow{C_\bullet(i_j^Y)} & C_\bullet(Y \times \mathbb{I}) \end{array}$$

Wir haben $\bar{d}D_{q-1} + D_{q-2}d = f_{q-1} - g_{q-1}$ nach Induktionsvoraussetzung und $\bar{d}f = fd$ bzw. $\bar{d}g = gd$, da beides Kettenabbildungen sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{d}(z_q) &= \bar{d}(f(\text{id}_q)) - \bar{d}(g(\text{id}_q)) - \bar{d}(D(d(\text{id}_q))) \\ &= f(d(\text{id}_q)) - g(d(\text{id}_q)) - (f - g)(d(\text{id}_q)) - D(d^2(\text{id}_q)) = 0\end{aligned}$$

d.h. z_q ist ein Zykel. Wir behaupten weiterhin, z_q ist auch Rand. Für den Fall $q = 0$ folgt dies aus $D_{-1} = \mathbf{0}$ und $H_0(f) = H_0(g)$ (man beachte $\Delta_{\text{top}}^0 = \{*\}$):

$$\begin{aligned}[z_0]_0 &= [(f - g)(\text{id}_0) - D_{-1}(d_0(\text{id}_0))]_0 \\ &= [(f - g)(\text{id}_0)]_0 = H_0(f - g)([\text{id}_0]_0) = [0]_0.\end{aligned}$$

Für $q \geq 1$ folgt die Behauptung aus 7.5, da $\Delta_{\text{top}}^q \times \mathbb{I}$ gemäß 1.2 konvex ist. Also existiert ein $c_{q+1} \in C_{q+1}(\Delta_{\text{top}}^q \times \mathbb{I})$ mit $d(c_{q+1}) = z_q$. Wir definieren nun

$$D_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X \times \mathbb{I})$$

für $\sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow X$ durch

$$D_q^X(\sigma) := C_{q+1}(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})(c_{q+1})$$

und auf ganz $C_q(X)$ durch \mathbb{Z} -lineare Ergänzung.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass $f^X(\sigma) = f^X(C_q(\sigma)(\text{id}_q))$, da C_q auf Morphismen durch Nachschalten definiert ist. Weiterhin besagt die Natürlichkeit von f^\bullet , dass das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_{\text{top}}^q) & \xrightarrow{C_q(\sigma)} & C_q(X) \\ f_q^{\Delta_{\text{top}}^q} \downarrow & & \downarrow f_q^X \\ C_q(\Delta_{\text{top}}^q \times \mathbb{I}) & \xrightarrow{C_q(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})} & C_q(X \times \mathbb{I}) \end{array}$$

gleiches gilt für g . Nach Induktionsannahme ist D_{q-1}^\bullet ebenfalls natürlich, demnach kommutiert im nachstehenden Diagramm auch das untere Quadrat,

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_{\text{top}}^q) & \xrightarrow{C_q(\sigma)} & C_q(X) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ C_{q-1}(\Delta_{\text{top}}^q) & \xrightarrow{C_{q-1}(\sigma)} & C_{q-1}(X) \\ D_{q-1} \downarrow & & \downarrow D_{q-1} \\ C_q(\Delta_{\text{top}}^q \times \mathbb{I}) & \xrightarrow{C_q(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})} & C_q(X \times \mathbb{I}) \end{array}$$

und somit das gesamte Diagramm. Alles in allem erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\bar{d}(D_q(\sigma)) &= \bar{d}(C_{q+1}(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})(c_{q+1})) = C_q(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})(d(c_{q+1})) = C_q(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})(z_q) \\ &= C_q(\sigma \times \text{id}_{\mathbb{I}})(f(\text{id}_q) - g(\text{id}_q) - D_{q-1}(d(\text{id}_q))) \\ &= f(C_q(\sigma)(\text{id}_q)) - g(C_q(\sigma)(\text{id}_q)) - D_{q-1}(d(C_q(\sigma)(\text{id}_q))) \\ &= f(\sigma) - g(\sigma) - D_{q-1}(d(\sigma)),\end{aligned}$$

wie gewünscht. Die Natürlichkeit von D_q bekommen wir nun aus dieser Darstellung gratis aufgrund der Natürlichkeit von f , g und D_{q-1} . \square

Fortsetzung des Beweises von Theorem 7.6. Wir können nun das Lemma anwenden und erhalten $C_\bullet(i_0^X) \simeq C_\bullet(i_1^X)$ woraus mittels 7.2 auch $H_\bullet(i_0^X) = H_\bullet(i_1^X)$ folgt.

Sind nun $f, g : X \rightarrow Y$ und eine Homotopie $H : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ von f nach g gegeben, so betrachten wir

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & \searrow & \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times \mathbb{I} \xrightarrow{H} Y \\ & \swarrow & \\ & & g \end{array}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} H_\bullet(f) &= H_\bullet(H \circ i_0^X) = H_\bullet(H) \circ H_\bullet(i_0^X) \\ &= H_\bullet(H) \circ H_\bullet(i_1^X) = H_\bullet(H \circ i_1^X) = H_\bullet(g), \end{aligned}$$

womit wir fertig sind. \square

8 Relative singuläre Homologie

Definition 8.1. Sei X ein Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum. Wir bezeichnen mit $\iota := \iota_A^X : A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Man definiert dann

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A) \text{ mittels } C_n(A) \xrightarrow{C_n(\iota)} C_n(X).$$

Bemerkung. Da C_n ein Hom-Funktor zugrunde liegt, der auf Morphismen durch Nachschalten definiert ist, ist das Bild einer Injektion unter C_n erneut eine Injektion. Für die kategorientheoretisch bewanderteren ist dies nichts weiter als die Linksexaktheit von Hom.

Genau wie in 2.8 können wir uns nun klarmachen, dass das Differential d^X Abbildungen

$$d_n^{(X,A)} : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$$

induziert. Man betrachte dazu den Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccc} C_n(A) & \xleftarrow{C_n(\iota)} & C_n(X) & \xrightarrow{\pi_n} & C_n(X, A) \\ \downarrow d_n^A & & \downarrow d_n^X & & \downarrow d_n^{(X,A)} \\ C_{n-1}(A) & \xleftarrow{C_{n-1}(\iota)} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

und verwende $C_\bullet(X, A) = \text{coker}(C_\bullet(\iota))$. Die Diagramme kommutieren (gemäß universeller Eigenschaft des Cokerns) und demnach gilt $d_{n-1}^{(X,A)} \circ d_n^{(X,A)} = \mathbf{0}$, wodurch $C_\bullet(X, A)$ zu einem Kettenkomplex wird. Wir definieren nun die **relative singuläre Homologie eines Raumpaares** (X, A) durch

$$H_\bullet(X, A) := H_\bullet(C_\bullet(X, A)).$$

Bemerkung. Wir haben offenbar $H_\bullet(X, \emptyset) = H_\bullet(X)$ und $H_\bullet(X, X) = \mathbf{0}$.

Fakt 8.2. Für jedes Raumpaar (X, A) gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(A) & \xrightarrow{i_n} & H_n(X) & \xrightarrow{p_n} & H_n(X, A) \\ & & & & \searrow \partial_n & & \\ & & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_{n-1}} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{p_{n-1}} & H_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \end{array}$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\mathbf{0} \rightarrow C_\bullet(A) \hookrightarrow C_\bullet(X) \twoheadrightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow \mathbf{0}$$

eine keS in $\text{Ch}(\mathbf{Ab})$. Anwenden von 2.15 liefert die Behauptung. \square

Bemerkung. Wir werden später (in 11.10) untersuchen, für welche (X, A) man Isomorphismen $H_\bullet(X, A) \cong H_\bullet(X/A)$ erhält.

Bemerkung 8.3. Theorem 7.6 lässt sich verallgemeinern auf Raumpaare, d.h. homotope Abbildungen $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induzieren die gleiche Abbildung

$$H_\bullet(f) = H_\bullet(g) : H_\bullet(X, A) \rightarrow H_\bullet(Y, B)$$

in der Homologie. Der Beweis läuft analog, da insbesondere die Konstruktion von D_q^X natürlich ist.

Theorem 8.4 (Ausschneidungssatz). *Sei X ein topologischer Raum, U und V zwei Unterräume von X mit $X = U^\circ \cup V^\circ$. Dann induziert die Abbildung von Raumpaaren $(V, V \cap U) \rightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus*

$$H_\bullet(V, V \cap U) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X, U)$$

von relativen Homologiegruppen.

Äquivalente Formulierung (setze $Z := X \setminus V$). *Seien $Z \hookrightarrow U \hookrightarrow X$ Inklusionen mit $\bar{Z} \subseteq U^\circ$. Dann induziert $(X \setminus Z, U \setminus Z) \rightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus*

$$H_\bullet(X \setminus Z, U \setminus Z) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X, U)$$

von relativen Homologiegruppen.

Den Beweis zu diesem Satz werden im nächsten Abschnitt erbringen. Wir beschäftigen uns zunächst mit einigen wichtigen Korollaren.

Korollar 8.5 (Mayer-Vietoris). *Sei X ein topologischer Raum und U, V offen in X mit $X = U \cup V$. Dann existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{i_n} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{j_n} & H_n(X) \\ & & & & \searrow \partial_n & & \\ & & H_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{i_{n-1}} & H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \end{array}$$

wobei die Abbildungen i und j in Matrixschreibweise gegeben sind als

$$i_n := \begin{pmatrix} i_n^U \\ i_n^V \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} H_n(\iota_{U \cap V}^U) \\ H_n(\iota_{U \cap V}^V) \end{pmatrix} \text{ und } j_n := (j_n^U, -j_n^V) := (H_n(\iota_U^X), -H_n(\iota_V^X)).$$

Beweis. Betrachte das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen:

$$\begin{array}{ccccc} C_\bullet(U \cap V) & \hookrightarrow & C_\bullet(U) & \twoheadrightarrow & C_\bullet(U, U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi} \\ C_\bullet(V) & \hookrightarrow & C_\bullet(X) & \twoheadrightarrow & C_\bullet(X, V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_\bullet(V, U \cap V) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C_\bullet(X, U) & & \end{array}$$

wobei $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ gemäß 8.4 Isomorphismen $\psi_n := H_\bullet(\tilde{\psi}_n)^{-1}$ und $\varphi_n := H_\bullet(\tilde{\varphi}_n)^{-1}$ in der Homologie induzieren.

Darüber hinaus ergeben die vertikalen und horizontalen, kurzen exakten Sequenzen in der Homologie lange exakte Sequenzen gemäß 2.15 und 8.2. Alles in allem erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{i_n^U} & H_n(U) & \xrightarrow{\theta_n} & H_n(U, U \cap V) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow i_n^V & & \downarrow j_n^U & & \parallel \psi_n \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(V) & \xrightarrow{j_n^V} & H_n(X) & \xrightarrow{\rho_n} & H_n(X, V) \xrightarrow{\eta_n} H_{n-1}(V) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \pi_n & & \\
& & H_n(V, U \cap V) & \xrightarrow{\varphi_n} & H_n(X, U) & & \\
& & \downarrow \gamma_n & & \downarrow \mu_n & & \\
& & H_{n-1}(U \cap V) & & H_{n-1}(U) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

wobei δ , γ , η und μ die Übergangsmorphismen der langen exakten Sequenz und

$$\begin{aligned}
\sigma_n &:= H_n((V, \emptyset) \hookrightarrow (V, U \cap V)) & \pi_n &:= H_n((X, \emptyset) \hookrightarrow (X, U)) \\
\theta_n &:= H_n((U, \emptyset) \hookrightarrow (U, U \cap V)) & \rho_n &:= H_n((X, \emptyset) \hookrightarrow (X, V))
\end{aligned}$$

die offensichtlichen Abbildungen sind. Wir definieren nun

$$\partial_n := \delta_n \circ \psi_n \circ \rho_n \quad \text{und} \quad \partial'_n := \gamma_n \circ \varphi_n \circ \pi_n \tag{14}$$

als Übergangsmorphismen. Es bleibt nun für ∂ , die Exaktheit der Sequenz

$$H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(U \cap V) \xrightarrow{i_n^U} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{j_n^V} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(U \cap V)$$

nachzuweisen. Auf die Rolle von ∂' werden wir nach dem Beweis in 8.6 eingehen.

Exaktheit bei $H_n(U \cap V)$. Wir betrachten den folgenden Ausschnitt des obigen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(U) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & H_{n+1}(U, U \cap V) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{i_n^U} & H_n(U) \\
\downarrow j_{n+1}^U & & \parallel \psi_{n+1} & \circlearrowleft & \downarrow i_n^V & & \downarrow j_n^U \\
H_{n+1}(X) & \xrightarrow{\rho_{n+1}} & H_{n+1}(X, V) & \xrightarrow{\eta_{n+1}} & H_n(V) & \xrightarrow{j_n^V} & H_n(X)
\end{array}$$

Wegen Exaktheit der oberen Zeile ist $\text{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(i_n^U)$, und wegen

$$i^V \circ \partial = i^V \circ \delta \circ \psi \circ \rho = \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \rho = \eta \circ \rho = \mathbf{0}$$

auch $\text{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(i_n^V)$, womit wir insgesamt $\text{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(i_n)$ erhalten.

Sei also $x \in \ker(i_n)$, d.h. $i_n^V(x) = 0$ und $i_n^U(x) = 0$. Exaktheit der oberen Zeile liefert uns ein $a \in \delta_{n+1}^{-1}(x)$. Setze $b := \psi_{n+1}^{-1}(a)$. Dann ist

$$\eta(b) = i^V(\delta(\psi^{-1}(b))) = i^V(\delta(a)) = i^V(x) = 0$$

und wegen der Exaktheit der unteren Zeile gibt es ein Urbild $c \in \rho_{n+1}^{-1}(b)$, welches gemäß Definition nun ein Urbild von x unter ∂_{n+1} ist.

Exaktheit bei $H_n(U) \oplus H_n(V)$. Es ist zunächst $ji = j^U i^U - j^V i^V = \mathbf{0}$ aufgrund der Kommutativität, also $\text{im}(i) \subseteq \ker(j)$.

Sei also $(x, y) \in H_n(U) \oplus H_n(V)$ mit $j_n^U(x) - j_n^V(y) = j_n(x) = 0$. Dann ist

$$0 = \pi_n(j_n^V(y) - j_n^U(x)) = \pi_n(j_n^V(y)) = \varphi_n^{-1}(\sigma_n(y)) \implies \sigma_n(y) = 0,$$

d.h. gemäß Exaktheit der linken Spalte gibt es ein $b \in H_n(U \cap V)$ mit $i_n^V(b) = y$. Setze $c := x - i_n^U(b)$. Wegen

$$j_n^U(c) = j_n^U(x) - j_n^U(i_n^U(b)) = j_n^U(x) - j_n^V(i_n^V(b)) = j_n^U(x) - j_n^V(y) = 0$$

und Exaktheit der rechten Spalte existiert dann ein $d \in \mu_{n+1}^{-1}(c)$. Setzen wir nun

$$e := \varphi_{n+1}(d) \in H_{n+1}(V, U \cap V),$$

so gilt

$$i_n^U(\gamma_{n+1}(e)) = \mu_{n+1}(\phi_{n+1}^{-1}(e)) = \mu_{n+1}(d) = c = x - i_n^U(b).$$

Mit anderen Worten, $i_n^U(b + \gamma_{n+1}(e)) = x$. Dann ist $a := b + \gamma_{n+1}(e)$ das gesuchte Urbild, denn

$$i_n(a) = (i_n^U(a), i_n^V(a)) = (x, i_n^V(b) + \underbrace{(i_n^V \circ \gamma_{n+1})(e)}_{=0}) = (x, i_n^V(b)) = (x, y).$$

Exaktheit bei $H_n(X)$. Für die Inklusion $\text{im}(j_n) \subseteq \ker(\partial_n)$ rechnen wir nach, dass

$$\partial \circ j \stackrel{\text{Def}}{=} \delta \circ \psi \circ \rho \circ (j^U - j^V) \stackrel{\text{Ex}}{=} \delta \circ \psi \circ \rho \circ j^U \stackrel{\text{Km}}{=} \delta \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \theta = \delta \circ \theta \stackrel{\text{Ex}}{=} \mathbf{0}.$$

Andererseits sei $x \in H_n(X)$ mit $\partial_n(x) = 0$, mit anderen Worten

$$\psi_n(\rho_n(x)) \in \ker(\delta_n) = \text{im}(\theta_n) \implies \exists a \in H_n(U) : \theta_n(a) = \psi_n(\rho_n(x)).$$

Dann ist

$$\rho_n(x - j_n^U(a)) = \rho_n(x) - \rho_n(j_n^U(a)) = \rho_n(x) - \psi^{-1}(\theta_n(a)) = 0.$$

Aufgrund der Exaktheit gibt es also ein $b \in H_n(V)$ mit $j_n^V(b) = x - j_n^U(a)$ und $(a, -b)$ ist das gesuchte Urbild. \square

9 Beweis des Ausschneidungssatzes

*”He doesn’t want us to cut through our chains ...
he wants us to cut through our feet.” – Gordon*

Seien $Z \hookrightarrow U \hookrightarrow X$ Inklusionen mit $\overline{Z} \subseteq U^\circ$. Wir wollen dann zeigen, dass die Abbildung $(X \setminus Z, U \setminus Z) \rightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus

$$H_\bullet(X \setminus Z, U \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, U)$$

induziert.

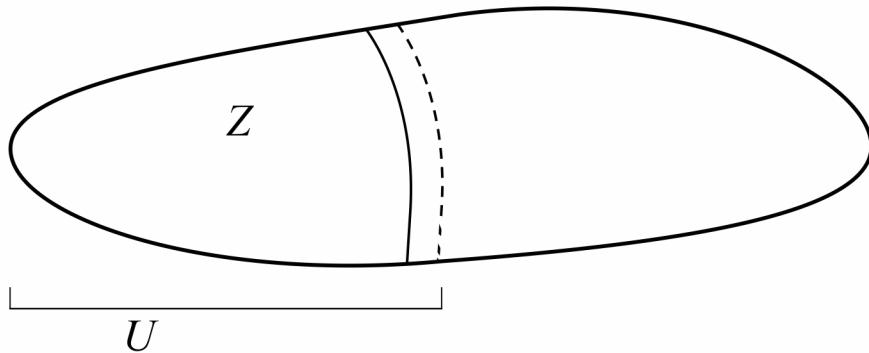


Abbildung 1: Ausschneidung von Z

Problem. Sei $X = U \cup V$ und $\sigma \in C_\bullet(U \cup V)$. Wir fragen uns dann, ob man $c = c_U + c_V$ mit $\sigma_U \in C_\bullet(U)$ und $c_V \in C_\bullet(V)$ schreiben kann:

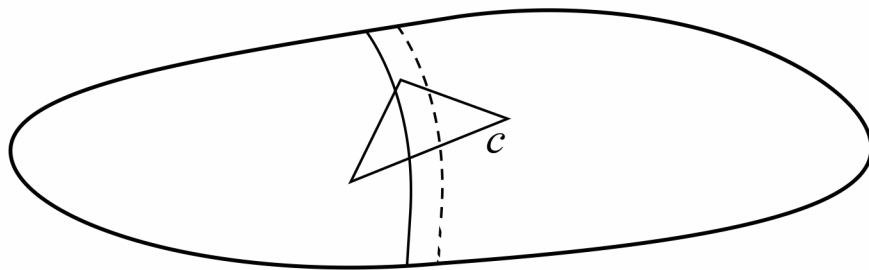
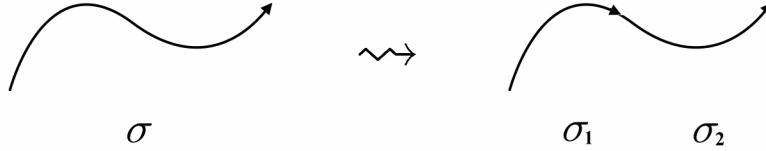


Abbildung 2: Problemsituation

Leider wird dies nicht immer möglich sein. *Aber:* Wenn c ein Zykel ist, so hat $[c]_\bullet$ in $H_\bullet(X)$ einen Repräsentanten mit dieser Eigenschaft. Um einen solchen

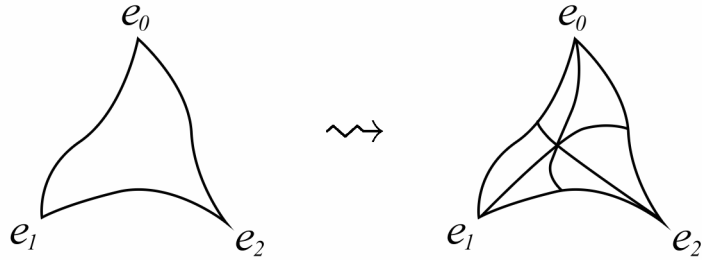
Repräsentanten zu finden, ersetzen wir die Simplizes $\sigma_i : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow X$ durch Summen von kleineren Simplizes. Man nennt dieses Verfahren auch *baryzentrische Unterteilung* oder *simpliziale Approximation*.

Wir verdeutlichen dies durch einige Bilder. Hier soll selbstverständlich die



Identität $[\sigma] = [\sigma_1] + [\sigma_2] = [\sigma_1] - [\sigma_2^{-1}]$ gelten.

Einen 2-Simplex τ wollen wir wie folgt unterteilen, wobei dann



$$[\tau] = \sum_{i=1}^6 \pm [\tau_i^{\pm 1}]$$

für geeignet gewählte Vorzeichen gilt. Dieser Prozess lässt sich dann iterieren, um eine immer "feinere" Unterteilung zu erhalten.

Wir wollen diese Idee nun formalisieren.

Definition 9.1 (Baryzentrische Unterteilung). Sei $p_q := \sum_{i=0}^q \frac{1}{q+1} e_i \in \Delta_{\text{top}}^q$ der Mittelpunkt des q -dimensionalen Standardsimplex.

1. Wir definieren $u_q \in C_q(\Delta_{\text{top}}^q)$ induktiv wie folgt (siehe 7.3):

$$u_0 := e_0$$

$$u_q := \sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot (p_q)_* \left(C_{q-1}(\tilde{d}_i^q)(u_{q-1}) \right)$$

2. Für $c = \sum_i n_i \sigma_i \in C_q(X)$ sei $\mathfrak{B}_q^X(c) := \sum_i n_i C_q(\sigma_i)(u_q)$ die **baryzentrische Unterteilung von c** .

Wir schreiben häufig $\mathfrak{B}_q(c)$ oder $\mathfrak{B}(c)$, wenn klar ist, was gemeint ist.

Lemma 9.2. 1. Für alle $f : X \rightarrow Y$ gilt $C_q(f) \circ \mathfrak{B}_q^X = \mathfrak{B}_q^Y \circ C_q(f)$.

2. $\mathfrak{B}_\bullet : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X)$ ist eine Kettenabbildung.

3. Es gibt eine in X natürliche Homotopie $\mathfrak{B} \simeq \text{id} : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X)$.

Beweis von 1 (Natürlichkeit in X). Für alle $\sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow X$ gilt:

$$\begin{aligned} C_q(f)(\mathfrak{B}_q^X(\sigma)) &= C_q(f) \circ C_q(\sigma)(u_q) = C_q(f \circ \sigma)(u_q) = \mathfrak{B}_q^Y(f \circ \sigma) \\ &= \mathfrak{B}_q^Y(C_q(f)(\sigma)). \end{aligned}$$

Beweis von 2 (Kettenabbildung). Es gilt zu zeigen, dass das folgende Diagramm für alle q kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{\mathfrak{B}_q} & C_q(X) \\ \downarrow d_q & & \downarrow d_q \\ C_{q-1}(X) & \xrightarrow{\mathfrak{B}_{q-1}} & C_{q-1}(X) \end{array}$$

Für $q \leq 0$ ist dies wegen $C_{q-1}(X) = \mathbf{0}$ offensichtlich. Wir behandeln zunächst den Fall $q = 1$ getrennt: Sei $\sigma : \Delta_{\text{top}}^1 \rightarrow X$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{B}(\sigma)) &= d(C_1(\sigma)(u_1)) = C_0(\sigma)(d(u_1)) = C_0(\sigma)(e_1 - e_0) \\ &= \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = d(\sigma) = \mathfrak{B}(d(\sigma)) \end{aligned}$$

da $\mathfrak{B} = \text{id}$ auf $C_0(X)$. Wir verwenden dies als Induktionsverankerung für eine Induktion nach q . Sei also $q \geq 2$ und wieder $\sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow X$. Wir bemerken kurz, dass

$$\partial_i^q(\text{id}_q) = d_i^q \circ \text{id}_q = \tilde{d}_i^q. \quad (15)$$

Weiterhin setzen wir, der Einfachheit halber, $\mathfrak{B}_\bullet^q := \mathfrak{B}_\bullet^{\Delta_{\text{top}}^q}$ und rechnen dann ohne viel Mühe nach, dass

$$\begin{aligned} d_q(\mathfrak{B}_q^X(\sigma)) &= d_q(C_q(\sigma)(u_q)) = (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q)(u_q) \\ &= (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q \circ p_{q*}) \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot C_{q-1}(\tilde{d}_i^q)(u_{q-1}) \right) \\ &= (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q \circ p_{q*}) \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot \mathfrak{B}_{q-1}^q(\tilde{d}_i^q) \right) \\ &= (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q \circ p_{q*}) \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot \mathfrak{B}_{q-1}^q(\partial_i^q(\text{id}_q)) \right) \\ (15) &= (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q \circ p_{q*} \circ \mathfrak{B}_{q-1}^q) \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_i^q(\text{id}_q) \right) \\ &= (C_{q-1}(\sigma) \circ d_q \circ p_{q*} \circ \mathfrak{B}_{q-1}^q)(d_q(\text{id}_q)) \\ (7.4) &= C_{q-1}(\sigma) (\mathfrak{B}_{q-1}^q(d_q(\text{id}_q)) - (p_{q*} \circ d_{q-1} \circ \mathfrak{B}_{q-1}^q \circ d_q)(\text{id}_q)) \\ (\text{Induktion}) &= C_{q-1}(\sigma) (\mathfrak{B}_{q-1}^q(d_q(\text{id}_q)) - (p_{q*} \circ \mathfrak{B}_{q-1}^q \circ d_{q-1} \circ d_q)(\text{id}_q)) \\ (d^2 = \mathbf{0}) &= C_{q-1}(\sigma) (\mathfrak{B}_{q-1}^q(d_q(\text{id}_q))) \\ (\text{Natürlichkeit}) &= \mathfrak{B}_{q-1}^X(C_{q-1}(\sigma)(d_q(\text{id}_q))) = \mathfrak{B}_{q-1}^X(d_q(\sigma)). \end{aligned}$$

Beweis von 3. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow X \times \mathbb{I} & p : X \times \mathbb{I} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto (x, 0) & (x, t) &\longmapsto x \end{aligned}$$

und wenden Lemma 7.8 auf $C_\bullet(i)$ und $C_\bullet(i) \circ \mathfrak{B}_\bullet$ an. Die Bedingungen für das Lemma sind aufgrund von (1), (2) und $\mathfrak{B}_0 = \text{id}$ erfüllt. Demnach erhalten wir eine Kettenhomotopie $D_q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X \times \mathbb{I})$ von $C_\bullet(i)$ nach $C_\bullet(i) \circ \mathfrak{B}_\bullet$. Somit existiert eine Kettenhomotopie

$$\text{von } \text{id} = C_\bullet(p) \circ C_\bullet(i) \text{ nach } C_\bullet(p) \circ C_\bullet(i) \circ \mathfrak{B}_\bullet = \mathfrak{B}_\bullet,$$

womit der Beweis dieses Lemmas abgeschlossen ist. \square

Wir bezeichnen ab jetzt mit eckigen Klammern $[\cdot]$ die Äquivalenzklasse in der Homologie und mit einem Querstrich $\overline{\cdot}$ die Äquivalenzklasse im relativen Kettenkomplex, i.e. die Projektion $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A)$ für $A \subseteq X$.

Weiterhin schreiben wir \mathfrak{B}^r für r -fache Verkettung von \mathfrak{B} mit sich selbst. Dabei gilt die Konvention $\mathfrak{B}^0 = \text{id}$.

Lemma 9.3. *Sei $A \subseteq X$ und $r \geq 0$. Dann gilt*

1. $c \in C_q(A) \implies \mathfrak{B}^r(c) \in C_q(A)$.
2. Sei $z \in C_q(X)$ mit $\overline{z} \in Z_q(X, A)$, so ist $\overline{\mathfrak{B}^r(z)} \in Z_q(X, A)$ und

$$\left[\overline{\mathfrak{B}^r(z)} \right] = [\overline{z}].$$

Beweis. Wir bezeichnen mit d das Differential in $C_\bullet(X)$ und mit d' das Differential in $C_\bullet(X, A)$.

Die erste Aussage ist klar, die zweite beweisen wir durch Induktion nach r . Der Fall $r = 0$ ist trivial und indem wir z durch $\mathfrak{B}^{-1}(z)$ ersetzen, genügt es gemäß Induktionsvoraussetzung, den Fall $r = 1$ zu behandeln.

Sei also $E_q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ die Kettenhomotopie $\mathfrak{B} \simeq \text{id}$ aus 9.2 (3). Diese schränkt sich ein zu einer Kettenhomotopie $C_q(A) \rightarrow C_{q+1}(A)$, da E natürlich ist. Mit anderen Worten,

$$d_{q+1}(E_q(z)) = \mathfrak{B}(z) - z - E_{q-1}(d_q(z)). \quad (16)$$

Es gilt $d_q(z) \in C_{q-1}(A)$ wegen $\overline{d_q(z)} = d'_q(\overline{z}) = 0$, also $\mathfrak{B}(d_q(z)) \in C_q(A)$. Daher

$$d'_q(\overline{\mathfrak{B}(z)}) = \overline{d_q(\mathfrak{B}(z))} = \overline{\mathfrak{B}(d_q(z))} = 0 \implies \overline{\mathfrak{B}(z)} \in Z_q(X, A).$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen. Wegen $d_q(z) \in C_{q-1}(A)$ ist nun auch

$$E_{q-1}(d_q(z)) \in C_q(A) \text{ und } \overline{d_{q+1}(E_q(z))} = d'_{q+1}(\overline{E_q(z)}) \in B_q(X, A).$$

Wenden wir nun $\bar{\cdot}$ und $[\cdot]$ auf (16) an, so erhalten wir also

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\overline{d_{q+1}(E_q(z))} \right] = \left[\mathfrak{B}(z) \right] - [\bar{z}] - \underbrace{\left[\overline{E_{q-1}(d_q(z))} \right]}_0 \\ \Rightarrow [\bar{z}] &= \left[\overline{\mathfrak{B}(z)} \right], \end{aligned}$$

womit auch die zweite Aussage bewiesen ist. \square

Definition 9.4. Sei (X, δ) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Unterräume. Dann definieren wir die **Distanz von A zu B** als

$$\delta(A, B) := \inf(\text{im}(\delta|_{A \times B})) = \inf \{ \delta(a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Fakt 9.5. Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, kompakt, nicht offen und disjunkt, so gilt $\delta(A, B) > 0$.

Beweis. Es ist $A \times B \subset X \times X$ kompakt, also ist $\text{im}(\delta|_{A \times B})$ ebenfalls kompakt und somit die Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n I_j = \text{im}(\delta|_{A \times B})$ endlich vieler abgeschlossener Intervalle $I_j \subseteq \mathbb{R}_+$ mit $0 \notin I_j$ wegen $A \cap B = \emptyset$. \square

Lemma 9.6. Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung. Dann gilt

$$\forall c \in C_q(X) : \exists r \geq 1, v \in C_q(V), u \in C_q(U) : \mathfrak{B}^r(c) = u + v.$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für $c = \sigma : \Delta_{\text{top}}^q \rightarrow X$ zu führen, da wir für eine endliche Linearkombination $\sum_j n_j \sigma_j \in C_q(X)$ das maximale r wählen können. Weiterhin ist die Aussage für $q = 0$ trivial, also können wir $q \geq 1$ annehmen.

Es ist $\Delta_{\text{top}}^q = \sigma^{-1}(U) \cup \sigma^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung. Wir setzen nun

$$A := \overline{\sigma^{-1}(U)} \setminus \sigma^{-1}(V) \quad B := \overline{\sigma^{-1}(V)} \setminus \sigma^{-1}(U)$$

und wenden 9.5 auf $A, B \subset \Delta_{\text{top}}^q$ mit $\delta(x, y) = \|x - y\|$ an. Es gilt demnach $\varepsilon := \delta(A, B) > 0$. Folglich ist jede Teilmenge von Δ_{top}^q mit Durchmesser $< \varepsilon$ entweder ganz in $\sigma^{-1}(U)$ oder ganz in $\sigma^{-1}(V)$ enthalten. Wir wählen nun r so groß, dass

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{q}{q+1} \right)^r < \varepsilon$$

gilt. Gemäß 9.7 gilt die Aussage nun für den Spezialfall $\sigma = \text{id}_q \in C_q(\Delta_{\text{top}}^q)$: Wenn $\mathfrak{B}^r(\text{id}_q) = \sum_j n_j \tau_j$ ist, so gilt für $\text{im}(\tau_j) \subset \Delta_{\text{top}}^q$ stets, dass diese Menge Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Daher ist entweder $\text{im}(\tau_j) \subset V$ oder $\text{im}(\tau_j) \subset U$. Die Summe spaltet sich dann auf in zwei Terme, welche einen Simplex $v \in C_q(V)$ und einen Simplex $u \in C_q(U)$ definieren.

Im Allgemeinen folgt die Aussage dann aus diesem Spezialfall aufgrund der Natürlichkeit von \mathfrak{B} (siehe 9.2, (1)). Genauer:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^r(\sigma) &= \mathfrak{B}^r(C_q(\sigma)(\text{id}_q)) = C_q(\sigma)(\mathfrak{B}^r(\text{id}_q)) = \sum_j n_j \cdot C_q(\sigma)(\tau_j) \\ &= \sum_j n_j \cdot C_q(\sigma \circ \tau_j) \end{aligned}$$

und $\text{im}(\tau_j) \subseteq \sigma^{-1}(V)$ oder $\text{im}(\tau_j) \subseteq \sigma^{-1}(U)$. \square

Lemma 9.7. Sei $\sigma \in C_q(\Delta_{\text{top}}^q)$ affin-linear und $\mathfrak{B}(\sigma) = \sum_{j \in J} n_j \tau_j$ die baryzentrische Unterteilung von σ . Dann sind alle τ_j ebenfalls affin-linear und für alle $j \in J$ gilt

$$\text{diam}(\text{im}(\tau_j)) \leq \frac{q}{q+1} \cdot \text{diam}(\text{im}(\sigma)).$$

Beweis. Die τ_j sind wieder affin-linear gemäß Definition von p_* (siehe 7.3). Wir behaupten nun zunächst, dass für jeden Simplex τ in der Summendarstellung von u_q (siehe 9.1) gilt:

1. $\tau = (x_0, \dots, x_q)$ ist ein Simplex im Sinne von 1.1 und
2. $\text{diam}(\text{im}(\tau)) \leq \sqrt{2} \cdot \frac{q}{q+1}$.

Wir beweisen diese Aussage per Induktion nach q . Für $q = 0$ ist dies trivial, sei also $q \geq 1$. Wir haben dann

$$u_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \cdot p_{q*}(C_{q-1}(\tilde{d}_i^q)(u_{q-1})),$$

d.h. die Simplizes in u_q sind von der Form $\sigma = p_{q*}(\tilde{d}_i^q \circ \tau)$ für ein τ aus u_{q-1} . Aus Definition 7.3 von p_* folgt dann sofort, dass das Bild von σ ein Simplex im Sinne von 1.1 ist, genauer genommen gilt mit $\text{im}(\tau) = (x_0, \dots, x_q)$, dass

$$\text{im}(\sigma) = (y_0, \dots, y_{i-1}, p_q, y_i, \dots, y_{q-1}) \text{ für } y_j := \tilde{d}_i^q(x_j).$$

Aufgrund von 1.2 genügt es nun, die Abstände der Ecken zueinander zu prüfen, da alle anderen Punkte zueinander geringeren Abstand haben. Für $0 \leq j, k < q$ gilt nach Induktionsannahme, dass

$$\|y_j - y_k\|_2 \leq \sqrt{2} \cdot \frac{q-1}{q} < \sqrt{2} \cdot \frac{q}{q+1},$$

da \tilde{d}_i^q eine Isometrie ist. Es bleibt also noch nachzurechnen, dass

$$\begin{aligned} \|p_q - y_j\|_2 &= \left\| \sum_{k=0}^q \left(\frac{1}{q+1} \cdot e_k \right) - y_j \right\|_2 = \frac{1}{q+1} \cdot \left\| \sum_{k=0}^q e_k - y_j \right\|_2 \\ &= \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{\sum_{l=0}^q (1 - (q+1) \cdot y_{j,l})^2} \\ &= \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{(q+1) - 2 \cdot (q+1) \cdot \sum_l y_{j,l} + (q+1)^2 \cdot \sum_l y_{j,l}^2} \\ &\leq \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{(q+1) - 2 \cdot (q+1) + (q+1)^2} \\ &= \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{(q+1)^2 - (q+1)} \\ &= \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{(q+1) \cdot q} \leq \frac{1}{q+1} \cdot \sqrt{2 \cdot q^2} \end{aligned}$$

für beliebiges $0 \leq j \leq q-1$.

Daraus folgt nun die allgemeine Aussage wie folgt: Ein Simplex ρ in $\mathfrak{B}(\sigma)$ ist wegen $\mathfrak{B}(\sigma) = C_q(\sigma)(u_q)$ von der Form $C_q(\sigma)(\tau) = \sigma \circ \tau$ für ein τ aus u_q . Da wir σ als affin-linear vorausgesetzt hatten, ist $\sigma(x) = \alpha + \beta \cdot x$, somit also

$$\text{diam}(\text{im}(\sigma)) = \|\sigma(e_j) - \sigma(e_k)\|_2 = |\beta| \cdot \|e_j - e_k\|_2 = \sqrt{2} \cdot |\beta|$$

für zwei Ecken e_j, e_k . Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|\sigma(\tau(x)) - \sigma(\tau(y))\|_2 &= |\beta| \cdot \|\tau(x) - \tau(y)\|_2 \\ &\leq |\beta| \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{q}{q+1} = \text{diam}(\text{im}(\sigma)) \cdot \frac{q}{q+1} \end{aligned}$$

für beliebige $x, y \in \Delta_{\text{top}}^q$. □

Damit sind wir nun in der Lage, den Ausschneidungssatz (Theorem 8.4) zu beweisen. Seien $Z \hookrightarrow U \hookrightarrow X$ Inklusionen mit $\bar{Z} \subseteq U^\circ$. Betrachte

$$\iota : (X \setminus Z, U \setminus Z) \hookrightarrow (X, U)$$

und die induzierte Abbildung

$$\iota_\bullet : H_\bullet(X \setminus Z, U \setminus Z) \longrightarrow H_\bullet(X, U).$$

Es gilt dann zu zeigen, dass ι_\bullet ein Isomorphismus ist.

Injektivität. Wir müssen zeigen, dass für $\beta \in H_q(X \setminus Z, U \setminus Z)$ gilt:

$$\iota_\bullet(\beta) = 0 \implies \beta = 0.$$

Nach Definition existiert ein $z \in C_q(X \setminus Z)$ mit $\bar{z} \in Z_q(X \setminus Z, U \setminus Z)$ und $[\bar{z}] = \beta$. Nach Voraussetzung ist also

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_\bullet(\beta) = \iota_\bullet([\bar{z}]) = [\iota(z)] \in H_q(X, U) \\ \iff &\exists x \in C_{q+1}(X), u \in C_q(U) : z = d(x) + u. \end{aligned}$$

Wir wählen dann gemäß 9.6 ein $r > 0$, so dass $\mathfrak{B}^r(x) = u + v$ eine Zerlegung mit $u \in C_{q+1}((X \setminus Z)^\circ)$ und $v \in C_{q+1}(U^\circ)$ ist. Dann ist

$$d(u + v) = d(\mathfrak{B}^r(x)) = \mathfrak{B}^r(d(x)) = \mathfrak{B}^r(z - u).$$

Demzufolge ist

$$y := \underbrace{\mathfrak{B}^r(z) - d(v)}_{\in C_q(X \setminus Z)} = \underbrace{d(u) - \mathfrak{B}^r(u)}_{\in C_q(U)} \in C_q(X \setminus Z) \cap C_q(U) = C_q(U \setminus Z).$$

Demnach also $\mathfrak{B}^r(z) = d(v) + y$ und somit

$$\beta = [\bar{z}] = [\mathfrak{B}^r(z)] = [d(v) + y] = 0.$$

Surjektivität. Sei $\alpha \in H_q(X, U)$. Wähle $z \in C_q(X)$ mit $\bar{z} \in Z_q(X, U)$ und $[\bar{z}] = \alpha$. Gemäß Lemma 9.6 gibt es dann ein $r > 0$, so dass

$$\mathfrak{B}^r(z) = x + a \text{ mit } x \in C_q((X \setminus Z)^\circ) \text{ und } a \in C_q(U^\circ).$$

Nach Lemma 9.3 gilt weiterhin

$$\bar{x} = \bar{x} + \bar{a} = \overline{\mathfrak{B}^r(z)} \in Z_q(X, U) \text{ und } [\bar{x}] = [\overline{\mathfrak{B}^r(z)}] = [\bar{z}].$$

Es ist $d(x) \in C_{q-1}((X \setminus Z)^\circ) \subseteq C_{q-1}(X \setminus Z)$ und $d(x) = d(\mathfrak{B}^r(z)) - d(a)$, also

$$d(x) = \mathfrak{B}^r(d(z)) - d(a) \in C_{q-1}(U),$$

daher $d(x) \in C_{q-1}(U) \cap C_{q-1}(X \setminus Z)$ und somit $\bar{x} \in Z_q(X \setminus Z, U \setminus Z)$ und somit wegen $\iota_\bullet[\bar{x}] = [\bar{z}] = \alpha$ ein Urbild. \square

10 Anwendungen der singulären Homologie

*"In theory, it promised to be quite practical.
In practice, however, it is very theoretical."*

Proposition 10.1 (Homologie der Sphären).

$$H_n(\mathbb{S}^d) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & ; \quad d = n = 0 \\ \mathbb{Z} & ; \quad d > 0 \text{ und } n \in \{0, d\} \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Da $\mathbb{S}^0 = \{0\} \cup \{1\}$, ist der Fall $d = 0$ klar gemäß 5.8 und 5.7. Da \mathbb{S}^d für $d > 0$ wegzusammenhängend ist, ist auch der Fall $d > 0 = n$ klar. Seien also $d, n > 0$. Dann ist

$$\mathbb{S}^d = \underbrace{\mathbb{S}^d \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}}_U \cup \underbrace{\mathbb{S}^d \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}}_V$$

eine offene Überdeckung mit $U \simeq V \simeq \{*\}$. Anwenden von Mayer-Vietoris (8.5) liefert die lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(U \cap V) & \longrightarrow & \overbrace{H_n(U) \oplus H_n(V)}^{\mathbf{0}} & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^d) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & H_{n-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \underbrace{H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V)}_{\mathbf{0} \text{ für } n > 1} & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{S}^d) \longrightarrow \dots \end{array}$$

welche wegen $U \cap V \simeq \mathbb{S}^{d-1}$ für $n > 1$ die kurze exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^d) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow \mathbf{0}$$

enthält. Mit anderen Worten, $H_n(\mathbb{S}^d) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1})$ für $n > 1$.

Fall 1 ($n > d$). Zunächst ist $n > 1$ und gemäß unserer Vorüberlegung dann $H_n(\mathbb{S}^d) \cong H_{n-d}(\mathbb{S}^0)$. Wir haben dann in der Mayer-Vietoris Sequenz den Ausschnitt

$$H_{n-d}(\{0\} \cap \{1\}) = \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow H_{n-d}(\mathbb{S}^0) \longrightarrow \mathbf{0} = H_{n-d-1}(\{0\} \cap \{1\})$$

und demzufolge $H_n(\mathbb{S}^d) \cong H_{n-d}(\mathbb{S}^0) \cong \mathbf{0}$.

Fall 2 ($n \leq d$). In diesem Fall gilt gemäß 6.4.

$$H_n(\mathbb{S}^d) \cong H_1(\mathbb{S}^{d-n+1}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{d-n+1})^{\text{ab}} = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad d = n \\ \mathbf{0} & ; \quad d > n \end{cases}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Ein Erzeuger der abelschen Gruppe $H_n(\mathbb{S}^n)$ heißt **Fundamentalklasse**, geschrieben $[\mathbb{S}^n]$. Diese ist nur eindeutig bis auf Vorzeichen; das Bild der Fundamentalklasse unter der Abbildung $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ mit $d \mapsto -d$ ist ebenfalls ein Erzeuger. Die Wahl einer Fundamentalklasse entspricht der Wahl eines Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{S}^n) \\ 1 &\mapsto [\mathbb{S}^n] \end{aligned}$$

Bemerkung 10.2. Man kann die Aussage von 10.1 zu einem Isomorphismus

$$H_{q+1}(S(X)) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$$

für alle $q \geq 1$ verallgemeinern. Beweis als Übung.

Theorem 10.3. Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Dann ist $m = n$.

Beweis. f induziert eine Abbildung

$$\hat{f} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\},$$

die wiederum ein Homöomorphismus ist. Es sind

$$\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \cong \mathbb{S}^{m-1} \text{ und } \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\} \cong \mathbb{S}^{n-1}$$

mittles $x \mapsto x/\|x\|_2$, d.h. $\mathbb{S}^{m-1} \cong \mathbb{S}^{n-1}$ und demnach $H_\bullet(\mathbb{S}^{m-1}) \cong H_\bullet(\mathbb{S}^{n-1})$. Wegen 10.1 folgt daraus bereits $m = n$. \square

Bemerkung 10.4. Theorem 10.3 lässt sich noch weiter verallgemeinern auf Homomorphismen von Mannigfaltigkeiten. Dann benötigt man das nun folgende Hilfsmittel.

Definition 10.5. Sei $x_0 \in X$. Dann heißt $H_n(X, X \setminus \{x_0\})$ die n -te **lokale Homotopiegruppe** von X bei x_0 .

Proposition 10.6. Sei $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt. Dann ist

$$H_\bullet(\iota_A^X) : H_\bullet(A) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X)$$

ein Isomorphismus und $H_\bullet(X, A) = \mathbf{0}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus 7.7 und wegen der langen exakten Sequenz für Raumpaare (8.2) folgt auch $H_\bullet(X, A) = \mathbf{0}$. \square

Korollar 10.7. Wir können somit feststellen, dass

1. $\mathbb{S}^n \not\cong \{*\}$ und
2. \mathbb{S}^{n-1} ist nicht Deformationsretrakt von \mathbb{D}^n .

Beweis. Die erste Aussage ist eine Anwendung von 7.7 und 10.1. Die zweite Aussage folgt wegen $\mathbb{D}^n \simeq \{*\}$ aus 10.6. \square

Theorem 10.8 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Unter der Widerspruchsannahme, $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ habe keinen Fixpunkt, konstruieren wir eine Abbildung $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ als

$$g(x) := x + \frac{2 \cdot \langle x, f(x) - x \rangle + \sqrt{4 \cdot \langle x, x - f(x) \rangle^2 - \|x\|^2 + 1}}{\|x - f(x)\|^2} \cdot (x - f(x))$$

Dies entspricht der Definition $g(x) := x + t_0(x - f(x))$, wobei t_0 die größere Lösung der quadratischen Gleichung

$$1 = \|x + t \cdot (x - f(x))\|$$

ist. Man verdeutlicht dies gerne anhand von Abbildung 3. Es gilt nun offenbar

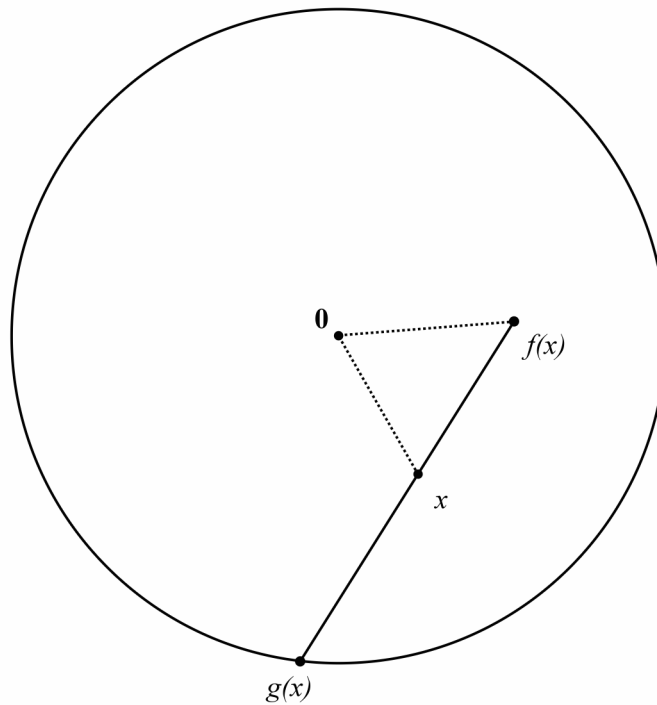


Abbildung 3: Hilfsfunktion

$g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und g ist ein Inverses zu $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ bis auf Homotopie. Dies ist ein Widerspruch zu 10.6. \square

Bemerkung 10.9. Anstatt $H_q(\mathbb{S}^n)$ kann man natürlich auch

$$\pi_q(\mathbb{S}^n) = \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathbf{Top})}((\mathbb{S}^q, *), (\mathbb{S}^n, *))$$

betrachten. Diese sind viel schwieriger zu berechnen und im Allgemeinen bis heute unbekannt.

Definition 10.10. Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig und $[\mathbb{S}^n]$ eine Fundamentalklasse. Dann ist der **Abbildungsgrad** $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ von f definiert als die eindeutige Zahl, so dass

$$H_n(f)([\mathbb{S}^n]) = \deg(f) \cdot [\mathbb{S}^n].$$

Bemerkung. $\deg(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Fundamentalklasse, denn \mathbb{Z} ist Initialobjekt in **Rings** und somit $H_n(f)$ durch das Bild von 1 eindeutig bestimmt.

Fakt 10.11. Seien $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig.

1. Es gilt $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.
2. Falls zusätzlich $f \simeq g$, so ist $\deg(f) = \deg(g)$.

Beweis. Die Aussagen folgen aus Funktorialität bzw. Homotopieinvarianz von H_n und Definition 10.10. \square

Proposition 10.12. Die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$,

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$$

hat Abbildungsgrad $\deg(f) = -1$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n . Für $n = 1$ folgt die Aussage aus der bekannten Aussage über $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong H_1(\mathbb{S}^1)$ (siehe 6.4).

Sei also $n > 1$. Wir schreiben

$$\mathbb{S}^d = \underbrace{\mathbb{S}^d \setminus \{(0, -1, 0, \dots, 0)\}}_U \cup \underbrace{\mathbb{S}^d \setminus \{(0, 1, 0, \dots, 0)\}}_V$$

mit $U \simeq V \simeq \{*\}$ und $U \cap V \cong \mathbb{S}^{n-1}$ ähnlich wie in 10.1. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\cong]{(8.2)} & H_n(\mathbb{S}^n, V) & \xleftarrow[\cong]{(8.4)} & H_n(U, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{(8.2)} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_n(f) & \circ & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_{n-1}(f) \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\cong]{} & H_n(\mathbb{S}^n, V) & \xleftarrow[\cong]{} & H_n(U, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

Die Kommutativität der äußeren beiden Quadrate folgt aus der Natürlichkeit des Schlangenlemmas (siehe 2.11). Da nun $H_{n-1}(f)$ gemäß Induktionsvoraussetzung einer Multiplikation mit -1 entspricht und das gesamte Diagramm kommutiert, entspricht auch $H_n(f)$ der Multiplikation mit -1 . \square

Korollar 10.13. Die *Antipodenabbildung* $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $a(x) := -x$ hat Abbildungsgrad $\deg(a) = (-1)^{n+1}$.

Beweis. a ist die Komposition von $n + 1$ Abbildungen wie in 10.12, woraus die Aussage wegen 10.11 folgt. \square

Proposition 10.14. Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt. Dann ist $f \simeq a$ und es gilt $\deg(f) = \deg(a) = (-1)^{n+1}$.

Beweis. Die zweite Aussage ist nur eine Anwendung von 10.11, wir zeigen also $f \simeq a$. Betrachte dazu $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^n$, gegeben durch

$$H(x, t) := \frac{(1-t) \cdot f(x) - t \cdot x}{\|(1-t) \cdot f(x) - t \cdot x\|}.$$

Dies ist wohldefiniert, da aus $f(x) \neq x$ wegen $\|x\| = 1 = \|f(x)\|$ folgt, dass für alle $t \in]0, 1[$ auch $f(x) \neq \frac{t}{1-t} \cdot x$ ist, demnach also $\|(1-t)f(x) - tx\| \neq 0$ für alle t .

Es gilt auch $H(x, 1) = -x = a(x)$ und wegen $\|f(x)\| = 1$ ist $H(x, 0) = f(x)$, womit also H die gesuchte Homotopie ist. \square

Korollar 10.15. Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung ohne Antipodenpunkt, d.h. $\forall x \in \mathbb{S}^n : f(x) \neq -x$. Dann ist $f \simeq \text{id}$ und $\deg(f) = 1$.

Beweis. Gemäß 10.14 ist $a \circ f \simeq a$, da $a \circ f$ fixpunktfrei ist. \square

Korollar 10.16. Für gerades n hat jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ einen Fixpunkt oder einen Antipodenpunkt.

Beweis. Hätte f weder Fix- noch Antipodenpunkt, so wäre gemäß 10.14 und 10.15 die unmögliche Identität $-1 = (-1)^{n+1} = \deg(f) = 1$ gelten. \square

Auf jeder glatten Mannigfaltigkeit gibt es das sogenannte Tangentialbündel $\pi : TM \rightarrow M$, wobei $\pi^{-1}(m)$ für alle $m \in M$ ein Vektorraum der Dimension $\dim(M)$ ist, der dem Tangentialraum am Punkt m entspricht. Ein tangenciales Vektorfeld ist ein Schnitt von π . Wir verwenden jedoch im Spezialfall $M = \mathbb{S}^n$ die folgende, einfachere

Definition 10.17. Ein **tangentiales Vektorfeld auf \mathbb{S}^n** ist eine stetige Abbildung $v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt: $\langle x, v(x) \rangle = 0$.

Proposition 10.18. 1. Für gerades n hat jedes tangentiale Vektorfeld auf \mathbb{S}^n eine Nullstelle.

2. Für ungerades n existieren Nullstellenfreie Vektorfelder auf \mathbb{S}^n .

Beweis. Anhand des Beispiels

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1})$$

ist (2) leicht einzusehen, es bleibt also Aussage (1) zu zeigen.

Angenommen, es gäbe ein Vektorfeld $v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ohne Nullstelle. Wir behaupten nun, dass $x \mapsto v(x)/\|v(x)\|$ eine stetige Selbstabbildung der \mathbb{S}^n ohne Fix- oder Antipodenpunkt ist, was den gewünschten Widerspruch zu 10.16 liefern würde. In der Tat folgt aus $\langle v(x), x \rangle = 0$ sofort $v(x) \neq \pm x$. \square

Proposition 10.19 (Hopsche Spurformel). *Sei $f : C \rightarrow C$ ein Morphismus in $\text{Ch}(\text{Vect}_K)$, wobei K ein Körper sei. Dann gilt*

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \cdot \text{Tr}(f_q) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \cdot \text{Tr}(H_q(f))$$

Beweis. Wir erinnern uns an die induzierten Abbildungen

$$Z_q(f) : Z_q(C) \longrightarrow Z_q(C) \quad B_q(f) : B_q(C) \longrightarrow B_q(C)$$

aus 2.8. Da alle Objekte Vektorräume sind, folgt aus $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ nun $Z_q(C) \cong B_q(C) \oplus H_q(C)$, d.h.

$$\text{Tr}(Z_q(f)) = \text{Tr}(B_q(f)) \oplus \text{Tr}(H_q(f)). \quad (17)$$

Außerdem ist

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_q(C) \longleftarrow C_q \xrightarrow{d} B_{q-1}(C) \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine keS, d.h. $C_q = \text{im}(d) \oplus \ker(d) = B_{q-1} \oplus Z_q$. Daraus erhalten wir

$$\text{Tr}(f_q) = \text{Tr}(Z_q(f)) + \text{Tr}(B_{q-1}(f)). \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt dann

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \cdot \text{Tr}(f_q) &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \cdot (\text{Tr}(B_q(f)) + \text{Tr}(B_{q-1}(f)) + \text{Tr}(H_q(f))) \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \cdot \text{Tr}(H_q(f)) \end{aligned}$$

da die Terme $(-1)^q \cdot \text{Tr}(B_q(f))$ und $(-1)^q \cdot \text{Tr}(B_{q-1}(f))$ eine Teleskopsumme bilden. \square

Theorem 10.20 (Lefschetzer Fixpunktsatz). *Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige Selbstabbildung eines Polyeders (siehe 1.4) ohne Fixpunkte. Dann gilt*

$$\lambda(f) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \cdot \text{Tr}(H_q(f)) = 0.$$

Beweisskizze. Wenn f keinen Fixpunkt hat, so wird jeder Punkt aus X durch Anwendung von f um eine gewisse Distanz verschoben. Demnach kann man eine Triangulierung von X wählen, so dass $\sigma \cap f(\sigma) = \emptyset$ für alle Simplizes σ in dieser Triangulierung - sofern f simplizial ist. Im Allgemeinen kann f bis auf Homotopie zu einer simplizialen Abbildung abgeändert werden.

Daraus folgt dann, dass $C_q(f)$ als simplizialer Kettenkomplex $\text{Tr}(C_q(f)) = 0$ erfüllen muss und aus der Hopfschen Spurformel folgt dann $\lambda(f) = 0$. \square

Bemerkung 10.21.

1. Falls $X \simeq \{*\}$, so gilt $H_0(X) = \mathbb{Z}$ und $H_q(X) = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$. Daher ist $\text{Tr}(H_q(f)) = \delta_{q,0}$, woraus $\lambda(f) = 1$ folgt. Also hat f einen Fixpunkt. Mit anderen Worten, der Lefschetz Fixpunktsatz verallgemeinert den Brouwerschen.
2. Die Umkehrung gilt allerdings nicht, betrachte z.B. $X = \mathbb{S}^1$ und $f = \text{id}$, dann ist

$$\text{Tr}(H_q(f)) = \begin{cases} 1 & ; \quad q = 0, 1 \\ 0 & ; \quad q \geq 2 \end{cases}$$

Also ist $\lambda(f) = 0$, aber f hat Fixpunkte.

Theorem 10.22. Sei $B \cong \mathbb{D}^r$ ein r -dimensionaler Ball und $n > r$.

1. Sei $B \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine Einbettung, dann ist

$$H_q(\mathbb{S}^n \setminus B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad q = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad q > 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathbb{S}^n \setminus B$ wegzusammenhängend.

2. Sei $n \geq 2$ und $B \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, dann ist

$$H_q(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad 0 \leq q < n \\ \mathbf{0} & ; \quad n \leq q \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathbb{R}^n \setminus B$ wegzusammenhängend.

Beweis. Die Aussagen über den Wegzusammenhang folgen wegen 5.7, daher beschränken wir uns auf die Berechnung der Homologie. Für Teil 2 ist dies wegen $\mathbb{R}^n \setminus B \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ schon durch 10.1 geschehen.

Wir zeigen Aussage 1 durch vollständige Induktion nach r . Für $r = 0$ ist

$$\mathbb{S}^n \setminus B \simeq \mathbb{R}^n \simeq \{*\},$$

womit die Aussage gemäß 5.8 in diesem Fall korrekt ist. Sei also $r \geq 1$ und $q \geq 0$. Sei weiter $z \in Z_q(\mathbb{S}^n \setminus B)$, wobei wir im Fall $q = 0$ zusätzlich annehmen, dass $z = x - y$ für $x, y \in \mathbb{S}^n \setminus B$ ist (wir identifizieren 0-Simplizes mit ihrem Bild).

Wir behaupten dann, z ist auch Rand. Es genügt, diese Behauptung zu verifizieren:

Fall $q = 0$: Behauptung \Leftrightarrow Für 0-Simplizes x, y ist $x - y$ Rand \Leftrightarrow Formale Summen $c = \sum_j n_j \sigma_j$ mit $\varepsilon_0(c) = 0$ (siehe 5.9) sind Rand \Leftrightarrow Es ist $\ker(\varepsilon_0) = B_0(\mathbb{S}^n \setminus B) \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow \mathbb{S}^n \setminus B$ wegzusammenhängend $\Leftrightarrow H_0(\mathbb{S}^n \setminus B) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow (1)$.

Fall $q > 0$: Behauptung $\Leftrightarrow Z_q(\mathbb{S}^n \setminus B) = B_q(\mathbb{S}^n \setminus B) \Leftrightarrow H_q(\mathbb{S}^n \setminus B) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (1)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also die Behauptung insbesondere für $r - 1$. Sei nun

$$f : \mathbb{I}^{r-1} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\cong} B$$

ein Homöomorphismus und $B_t := f(\mathbb{I}^{r-1} \times \{t\}) \subset B$ für $t \in \mathbb{I}$, insbesondere also $C_q(\mathbb{S}^n \setminus B_t) \supset C_q(\mathbb{S}^n \setminus B) \ni z$. Da B_t ein Ball der Dimension $r - 1$ in \mathbb{S}^n ist, existiert gemäß Behauptung ein $b_t \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B_t)$ mit $d(b_t) = z$. Wäre $b_t \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B)$, so wären wir fertig. Daher nehmen wir das Gegenteil an. Sei weiterhin

$$b_t = \sum_{j \in J_t} n_j \cdot \sigma_j \implies \underbrace{\bigcup_j \text{im}(\sigma_j)}_{\text{kompakt}} \subseteq \mathbb{S}^n \setminus B_t$$

da das Bild von $\sigma_j : \Delta_{\text{top}}^{q+1} \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus B$ kompakt und J_t eine endliche Menge von Indizes ist. Da weiterhin B_t abgeschlossen in \mathbb{S}^n ist, existiert ein $U_t \supset B_t$, offen in \mathbb{S}^n , mit der Eigenschaft, dass

$$\bigcup_{j \in J_t} \text{im}(\sigma_j) \cap U_t = \emptyset.$$

Nun ist $B \cap U_t$ offen in B , demnach ist $f^{-1}(B \cap U_t)$ offen. Weiterhin ist

$$f^{-1}(B \cap U_t) \supset f^{-1}(B_t) = \mathbb{I}^{r-1} \times \{t\}$$

d.h. $f^{-1}(B \cap U_t) = \mathbb{I}^{r-1} \times V_t$ für geeignete offene Umgebungen V_t von $t \in \mathbb{I}$. Wir wählen nun $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{m}$ kleiner als die Lebesgue-Zahl von $\{V_t\}_{t \in \mathbb{I}}$ ist. Dann gilt:

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \exists t_j \in \mathbb{I} : I_j := \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right] \subset V_{t_j}$$

Wir setzen nun

$$Q_j := f(\mathbb{I}^{r-1} \times I_j) \subset B \cap U_{t_j} \subseteq U_{t_j}.$$

Dann ist insbesondere $b_j := b_{t_j} \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus U_{t_j}) \subset C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus Q_j)$ mit $d(b_j) = z$.

Mit anderen Worten, wir haben eine Überdeckung durch abgeschlossene Mengen

$$B = \bigcup_{j=1}^m Q_j \text{ mit } b_j \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus Q_j), \text{ so dass } d(b_j) = z. \quad (19)$$

Es gilt also, ein Element

$$\begin{aligned} b \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B) &= C_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_m)) \\ &= C_{q+1}((\mathbb{S}^n \setminus Q_1) \cap \dots \cap (\mathbb{S}^n \setminus Q_m)) \end{aligned}$$

zu finden mit $d(b) = z$. Per Induktion genügt es jedoch nun, ein

$$b \in C_{q+1}((\mathbb{S}^n \setminus Q_1) \cup (\mathbb{S}^n \setminus Q_2))$$

mit dieser Eigenschaft zu finden. Wir setzen dann $X_i := \mathbb{S}^n \setminus Q_i$ und erhalten wegen

$$Q_1 \cap Q_2 = f(\mathbb{I}^r \times [0, \frac{1}{m}]) \cap f(\mathbb{I}^r \times [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]) = f(\mathbb{I}^r \times \{\frac{1}{m}\}) = B_{1/m}$$

eine offene Überdeckung

$$X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cap Q_2) = \mathbb{S}^n \setminus B_{1/m}. \quad (20)$$

Wir betrachten dann den folgenden Ausschnitt aus der zugehörigen Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \longrightarrow \dots$$

Es ist $[z] \in H_q(\mathbb{S}^n \setminus B) \subseteq H_q(X_1 \cap X_2)$ und unter i (siehe 8.5) wird $[z]$ abgebildet auf 0, da $z \in B_q(X_1)$ und $z \in B_q(X_2)$ gemäß (19). Außerdem ist aber $H_{q+1}(X_1 \cup X_2) = \mathbf{0}$ nach Induktionsvoraussetzung und (20). Also ist i injektiv und wir wissen $z \in B_q(X_1 \cap X_2)$, was gerade zu zeigen war. \square

Theorem 10.23. *Sei $S \cong \mathbb{S}^r$ eine r -dimensionale Sphäre und $n > \max\{r, 1\}$.*

1. *Sei $S \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine Einbettung, dann ist*

$$H_q(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & ; \quad r = n - 1, q = 0 \\ \mathbb{Z} & ; \quad r < n - 1, q \in \{0, n - r - 1\} \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

2. *Sei $S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, dann ist*

$$H_q(\mathbb{R}^n \setminus S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & ; \quad q = 0, r = n - 1 \\ \mathbb{Z} & ; \quad q = r = n - 1 \\ \mathbb{Z} & ; \quad r < n - 1, q \in \{0, r - n - 1\} \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis von 1. Der Fall $r = 0$ folgt aus 10.1 wegen $\mathbb{S}^n \setminus S \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. Wir verwenden dies als Induktionsverankerung für eine Induktion nach r , sei also $r \geq 1$ und $f: \mathbb{S}^r \xrightarrow{\sim} S$ ein Homöomorphismus. Wir definieren

$$D^\pm := \{(x_0, \dots, x_r) \in \mathbb{S}^r \mid 0 \leq \pm x_0\} \subset \mathbb{S}^r,$$

die obere bzw. untere Halbkugel. Wir setzen dann $B^\pm := f(D^\pm)$ und erhalten damit $T := B^+ \cap B^- \cong \mathbb{S}^{r-1}$. Setze $r' := r - 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1 ($q \geq 1$): Aufgrund von 10.22 Teil 1 ist nun

$$H_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B^+) \oplus H_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus B^-) = \mathbf{0} = H_q(\mathbb{S}^n \setminus B^+) \oplus H_q(\mathbb{S}^n \setminus B^-).$$

Mayer-Vietoris (8.5) für $\mathbb{S}^n \setminus T = (\mathbb{S}^n \setminus B^+) \cup (\mathbb{S}^n \setminus B^-)$ liefert daher die exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_{q+1}(\mathbb{S}^n \setminus T) \xrightarrow{\cong} H_q(\mathbb{S}^n \setminus S) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Für $r < n - 1$ ist auch $r' < n - 1$ und aus $q = n - r - 1$ folgt

$$q + 1 = n - r = n - r' - 1,$$

womit die Aussage nun direkt aus der Induktionsvoraussetzung folgt. Man bemerke an dieser Stelle, dass aus $r = n - 1$ und $q = n - r - 1$ sofort $q = 0$ folgern würde, wonach also dieser Fall nicht eintreten kann.

Fall 2 ($q = 0$): Wir wenden erneut Mayer-Vietoris an, erhalten diesmal jedoch die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) & & \\ & & & & \downarrow \partial & & \\ & \searrow & & & & & \\ H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) & \xrightarrow{i} & H_0(\mathbb{S}^n \setminus B^+) \oplus H_0(\mathbb{S}^n \setminus B^-) & \xrightarrow{j} & H_0(\mathbb{S}^n \setminus T) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \cong \downarrow \varphi & \circlearrowleft & \cong \downarrow \psi & & \\ \mathbb{Z} \cong \{(a, a)\} = \ker(\pi) & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi: (a,b) \mapsto a-b} & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

wobei φ durch 10.22 gegeben ist und ψ nach Induktionsvoraussetzung, da in jedem Fall $r' < n - 1$ ist. Es gibt nun noch zwei Fälle zu klären:

Fall 2.1 ($r < n - 1$). Dies bedeutet $r' < n - 2$ und somit insbesondere $q = 1 < n - r' - 1$, damit ist also nach Induktionsvoraussetzung $H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) = \mathbf{0}$. Damit ist

$$H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \text{im}(i) \cong \ker(j) \cong \ker(\pi) \cong \mathbb{Z}.$$

Fall 2.2 ($r = n - 1$). Wir haben nun $q = 1 = n - r = n - r' - 1$, nach Induktionsvoraussetzung also $H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) \cong \mathbb{Z}$. Wir erhalten also eine keS

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) \xrightarrow{\varphi} \text{im}(i) \cong \ker(\pi) \rightarrow \mathbf{0}$$

und daher $H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Wer eine genauere Begründung hierfür sucht, greife vor nach 13.9 und 13.10 und folgere aus der Projektivität von \mathbb{Z} , dass die obige Sequenz spaltet. \square

Korollar 10.24 (Jordan-Brouwerscher Separationssatz). Sei $\mathbb{S}^r \cong S \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ bzw. $\mathbb{S}^r \cong S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Inklusion.

1. Ist $r < n - 1$, so ist $\mathbb{S}^n \setminus S$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus S$ zusammenhängend.
2. Ist $r = n - 1$, so besteht $\mathbb{S}^n \setminus S$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus S$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Beweis. Folgt sofort aus 10.23 und 5.10. □

Theorem 10.25 (Invarianz des Gebiets). Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Unterräume mit $X \cong Y$ und X offen. Dann ist auch Y offen in \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $y \in Y$ und

$$f : X \xrightarrow{\cong} Y$$

ein Homöomorphismus. Wir wählen $\delta > 0$, so dass $B := B_\delta(f^{-1}(y)) \subset X$. Aufgrund der Topologie des \mathbb{R}^n ist dies möglich, da X offen ist. Es gilt

$$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B) = (\mathbb{R}^n \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(\partial B)) = (\mathbb{R}^n \setminus f(B)) \cup f(B^\circ)$$

wobei $\mathbb{R}^n \setminus f(B)$ gemäß 10.22 Teil 2 und $f(B^\circ)$ offensichtlich wegzusammenhängend sind. Demnach sind diese beiden gerade die Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B)$, welche es nach 10.23 Teil 2 geben muss.

Somit ist $f(B^\circ)$ offen in $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B)$ und eine \mathbb{R}^n -Umgebung von y . □

11 Zelluläre Homologie

”A plague, on both your houses.“

Definition 11.1. Eine n -Zelle ist ein Raum e mit $e \cong \mathring{\mathbb{D}}^n$. Wenn $B \subseteq X$ eine abgeschlossene Inklusion ist, so **entsteht X aus B durch Ankleben von n -Zellen** $\{e_i^n\}_{i \in I}$, falls

1. $\forall i \in I : \exists \bar{e}_i^n \subseteq X$, so dass mit $\partial \bar{e}_i^n := B \cap \bar{e}_i^n$ gilt: $e_i^n = \bar{e}_i^n \setminus \partial \bar{e}_i^n$.
2. $X = B \cup \bigcup_{i \in I} \bar{e}_i^n$
3. Es ist $e_i^n \cap e_j^n = \emptyset$ für $i \neq j$.
4. Für alle $i \in I$ existiert eine stetige Abbildung

$$f_i : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\bar{e}_i^n, \partial \bar{e}_i^n)$$

welche ein relativer Homöomorphismus ist, d.h. die Einschränkung auf $\mathring{\mathbb{D}}^n = \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Homöomorphismus.

5. $Z \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow Z \cap B$ ist abgeschlossen in X und $f_i^{-1}(Z)$ ist abgeschlossen in \mathbb{D}^n für alle $i \in I$.

Die Einschränkung $f_i|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ heißt **Verklebeabbildung** der Zelle e_i^n . Mit anderen Worten,

$$X = B \cup \coprod_{i \in I} \mathbb{D}^n \quad \text{wobei} \quad f : \coprod_{i \in I} \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow B$$

die von den f_i induzierte Abbildung ist.

Definition 11.2. Ein **relativer Zellenkomplex** (X, A) ist ein topologischer Hausdorffraum X mit A abgeschlossen und einer Folge abgeschlossener Unterräume

$$A = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^{n-1} \subset X^n \subset \dots \subset X,$$

so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

1. X^k entsteht aus X^{k-1} durch Ankleben von k -Zellen (siehe 11.1).
2. Es ist $X = \bigcup_{k \geq -1} X^k$.
3. $Z \subset X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow Z \cap X^k$ ist abgeschlossen für alle $k \geq -1$.

Ist $A = \emptyset$, so heißt X ein **Zellenkomplex**. Wir nennen X^n das **n -Gerüst** oder **n -Skelett** von X .

Falls $X^n = X$ und n minimal mit dieser Eigenschaft ist, so heißt X ein **n -dimensionaler Zellenkomplex** und wir schreiben $\dim(X) := n$. Falls kein solches n existiert setzen wir formal $\dim(X) := \infty$. Wurden nur endlich viele Zellen angeklebt, so heißt X **endlicher Zellenkomplex**.

Definition 11.3. ein **CW-Komplex** X ist ein Zellenkomplex X , so dass zusätzlich folgendes gilt:

- (C) Jede abgeschlossene Zelle trifft das Innere endlich vieler anderen Zellen.
- (W) $Z \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $Z \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Zelle \bar{e} .

Bemerkung. Diese Abkürzung steht für **c**losure finiteness und **w**weak topology.

Bemerkung 11.4. Die Bedingungen (C) und (W) folgen bereits aus Definition 11.1 und 11.2, indem man induktiv zeigt, dass sie für jedes X^n gelten. Falls dann $\dim(X) = \infty$, so verwendet man 11.2, 3. Diese Bedingung lässt sich auch als

$$X = \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} X^n$$

formulieren, wobei hier der Colimes in **Top** gemeint ist.

Die reellen und komplexen projektiven Räume sind endliche CW-Komplexe, wie wir gleich sehen werden. Sei im Folgenden immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir setzen dann $d := \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) \in \{1, 2\}$ und

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \text{ wobei } \forall \alpha \in \mathbb{K}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1} : \mathbf{x} \sim \alpha \cdot \mathbf{x}$$

der n -dimensionale **projektive Raum**, der Raum der Ursprungsgeraden im \mathbb{K}^{n+1} . Wir schreiben $[x_0 : \dots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse eines Punkts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ unter \sim .

Es ist $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n / (-x \sim x)$, insbesondere $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1 / (-x \sim x) \cong \mathbb{S}^1$. Damit ist $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ als Quotient eines kompakten Raums kompakt. Darüber hinaus ist der reell-projektive Raum eine Mannigfaltigkeit. Um dies einzusehen, wählt man Karten, die nicht zwei gegenüberliegende Punkte enthalten. Analog gilt für $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$:

$$\begin{array}{ccc} (x_0, \dots, x_n) & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \xleftarrow{\iota} \mathbb{S}^{2n+1} \\ \downarrow & \downarrow \pi & \swarrow \hat{\pi} := \pi \circ \iota \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & \end{array}$$

wobei π die kanonische Projektion ist. Damit sind sowohl π als auch $\hat{\pi}$ stetig. Daher ist auch $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ kompakt, da \mathbb{S}^{2n+1} es ist.

Proposition 11.5. *Die stetige Abbildung*

$$f : (\mathbb{D}^{dn}, \mathbb{S}^{dn-1}) \ni x \longmapsto [x_1 : \dots : x_n : 1 - \|x\|] \in (\mathbb{K}\mathbb{P}^n, \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1})$$

ist ein relativer Homöomorphismus. Mit anderen Worten, der $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ entsteht aus dem $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer dn -Zelle.

Beweis. Zunächst ist

$$j: (\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n \cong \mathring{\mathbb{D}}^{nd}$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

ein Homöomorphismus, da

$$h: \mathbb{K}^n \longrightarrow (\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1})$$

$$x \longmapsto [x_1 : \dots : x_n : 1]$$

ein stetiges Inverses zu j definiert. Also unterscheiden sich $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ um eine offene dn -Zelle. Wir haben nun die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \cong \mathring{\mathbb{D}}^{nd} & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}\mathbb{P}^n \\ & \searrow \hat{f} & \uparrow \circlearrowleft \\ & & \mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow[\hat{j}]{\cong} \mathbb{K}^n \end{array}$$

wobei wir mit f hier auch die Einschränkung auf $\mathring{\mathbb{D}}^{nd} = \mathbb{D}^{nd} \setminus \mathbb{S}^{nd-1}$ bezeichnen und \hat{f} von f induziert wird, da $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ nicht im Bild der eingeschränkten Abbildung liegt.

Nun ist $j \circ \hat{f}$ der Homöomorphismus $x \mapsto \frac{1}{1-||x||} \cdot x$ mit dem Inversen

$$y \mapsto \frac{1}{1+||y||} \cdot y.$$

Also ist zwangsläufig auch \hat{f} ein Homöomorphismus - was nichts weiter bedeutet, als dass f ein relativer Homöomorphismus ist. \square

Korollar 11.6. *Der $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ist ein CW-Komplex mit je einer Zelle in Dimension $0, d, 2d, \dots, (n-1)d, nd$.* \square

Bemerkung. Die Zellzerlegung der projektiven Räume schreibt man oft als

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n \text{ bzw.}$$

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = e_0 \cup e_2 \cup \dots \cup e_{2n}.$$

Definition 11.7. Sei X ein CW-Komplex und $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, welche die Vereinigung von Zellen aus X ist - mit anderen Worten, A ist selbst ein CW-Komplex - dann nennen wir das Raumpaar (X, A) ein **CW-Paar**.

Proposition 11.8. *Jeder kompakte Unterraum $K \subseteq X$ eines CW-Komplexes X trifft nur das Innere von endlich vielen Zellen. Insbesondere ist K Unterraum eines endlichen CW-Komplexes.*

Beweis. Sicherlich ist jeder Punkt $x \in K$ in einer offenen Zelle $e(x)$ enthalten. Die offene Überdeckung $K = \bigcup_{x \in K} e(x)$ hat dann eine endliche Teilüberdeckung $K = \bigcup_{i=1}^r e_i$ durch offene Zellen, da K kompakt ist. Wir behaupten nun, dass K das Innere keiner anderen offenen Zelle trifft. Angenommen also, es gäbe ein $y \in K$ und eine Zelle $e \notin \{e_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ mit $y \in e$. Es existiert weiterhin ein j , so dass $y \in e_j$, demnach also $y \in e \cap e_j$. Dies ist aber unmöglich, da offene Zellen gemäß Definition disjunkt sind. \square

Proposition 11.9. *Zu jedem CW-Paar (X, A) gibt es eine offene Umgebung $U \supseteq A$ in X , so dass A ein strenger Deformationsretrakt von U ist.*

Beweis. Wir verweisen auf [SZ, 4.3.2]. \square

Proposition-Definition 11.10. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren die **reduzierte Homologie** von (X, x_0) als $\tilde{H}_\bullet(X) := H_\bullet(X, x_0)$. Es gilt nun

1. $H_\bullet(X) = \tilde{H}_\bullet(X) \oplus H_\bullet(\{x_0\})$ und $\tilde{H}_\bullet(X)$ ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Punktes x_0 .
2. Sei $A \subset U \subset X$ mit A abgeschlossen und U offen, so dass A strenger Deformationsretrakt von U ist. Dann gilt $H_\bullet(X, A) \cong \tilde{H}_\bullet(X/A)$.

Bemerkung. Daraus folgt mit 11.9 für jedes CW-Paar (X, A) und $q > 0$

$$H_q(X, A) \cong \tilde{H}_q(X/A) \cong H_q(X/A).$$

Beweis. Zum Beweis von 1 betrachten wir die lange exakte Sequenz des Raumpaares (X, x_0) :

$$\cdots \longrightarrow H_q(\{x_0\}) \xrightarrow{\iota_q} H_q(X) \xrightarrow{\pi_q} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(\{x_0\}) \longrightarrow \cdots$$

Für $q \geq 2$ ist, nach 5.8, $H_q(\{x_0\}) = H_{q-1}(\{x_0\}) = \mathbf{0}$ und somit die Aussage klar. Im Fall $q = 0$ müssen wir nur zeigen, dass ι_0 injektiv ist, da die \ker

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{\iota_0} H_0(X) \xrightarrow{\pi_0} \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \mathbf{0}$$

dann spaltet. Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{ccc} C_0(x_0) = \mathbb{Z}[x_0] & \xleftarrow{i_0} & C_0(X) = \mathbb{Z}[X] \\ \parallel & \circlearrowleft & \downarrow p \\ H_0(x_0) & \xrightarrow{\iota_0} & H_0(X) \end{array}$$

wobei $i(n \cdot x_0) = n \cdot x_0$ die von der Inklusion induzierte Abbildung im Grad 0 ist. Wie üblich identifizieren wir Punkte mit Abbildungen $\Delta_{\text{top}}^0 \rightarrow X$. Es bleibt noch $C_0(X) = Z_0(X)$ zu bemerken. Um nun zu verifizieren, dass ι_0 injektiv ist,

genügt zu zeigen, dass $\text{im}(i_0) \cap \ker(p) = \mathbf{0}$. Ist allerdings $b \in \ker(p) = B_0(X)$, so ist $b = x_1 - x_2$ für zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ nach Definition des Differentials. Andererseits ist $\text{im}(i_0) = \mathbb{Z} \cdot x_0$. Da alle Punkte (als Simplizes) linear unabhängig über \mathbb{Z} in der freien abelschen Gruppe sind, ist die Aussage somit offenbar.

Für $q = 1$ ist jedenfalls π_1 injektiv. Nach der exakten Formel für ∂ aus 2.15 lässt sich jedoch nachprüfen, dass $\partial = \mathbf{0}$: Man mache sich dazu klar, dass

$$\begin{array}{ccc} C_q(x_0) = \mathbb{Z}[x_0] & \hookrightarrow & \mathbb{Z}[\Sigma^q] = C_q(X) \\ n \cdot x_0 & \mapsto & n \cdot x_0 \end{array}$$

die Inklusion im Grad q ist. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\Sigma^1] = C_1(X) & \xrightarrow{\tau_1} & C_1(X)/C_1(x_0) = \mathbb{Z}[\Sigma^1]/\mathbb{Z}[x_0] \\ \downarrow d & \circlearrowleft & \downarrow \bar{d} \\ \mathbb{Z}[X] = C_0(X) & \xrightarrow{\tau_0} & C_0(X)/C_0(x_0) = \mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}[x_0] \end{array}$$

Es ist nun

$$d\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = 0 \iff \bar{d}\left(\tau_1\left(\sum_i n_i \sigma_i\right)\right) = 0,$$

da x_0 linear unabhängig über \mathbb{Z} ist. Wir können also als Urbild eines Zyklus $[z] \in C_1(X, x_0)$ unter τ_1 ein $z \in Z_1(X)$ wählen, welches durch das Differential in $C_\bullet(X)$ auf 0 abgebildet wird. Aus der expliziten Formel folgt dann $\partial = \mathbf{0}$ und somit, aufgrund der Exaktheit, die Surjektivität von π_1 .

[TODO: Teil 2 nach Aufgabe 7.2] □

Proposition-Definition 11.11. Sei X ein CW-Komplex. Dann gilt

$$H_q(X^n, X^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\kappa(n)} & ; \quad q = n \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\kappa(n) := \kappa_X(n)$ die Anzahl an Zellen bezeichne, die an das $(n-1)$ -Skelett angeklebt wurden, um X^n zu erhalten.

Beweis. Für $n = 0$ folgt die Aussage aus 5.8, da X^0 eine disjunkte Vereinigung einzelner Punkte ist ($\kappa(0)$ an der Zahl) und $X^{-1} = \emptyset$ gemäß Definition. Sei nun $n \neq 0$. Ist $q > 0$, so liefert uns eine Anwendung von 8.5 die Identität

$$H_q(\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n) = H_q(\mathbb{S}^n) \oplus H_q(\mathbb{S}^n).$$

Somit ist gemäß 11.10

$$H_q(X^n, X^{n-1}) \cong H_q(X^n/X^{n-1}) \cong H_q\left(\bigvee_{i=1}^{\kappa(n)} \mathbb{S}^n\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{\kappa(n)} H_q(\mathbb{S}^n),$$

woraus sich die Aussage mittels 10.1 nun einfach ablesen lässt.

Es bleibt also der Fall $q = 0$ für $n \neq 0$ zu diskutieren. Betrachte folgenden Ausschnitt der langen exakten Sequenz des Raumpaares (X^{n-1}, X^n) :

$$H_0(X^{n-1}) \xrightarrow{\iota} H_0(X^n) \longrightarrow H_0(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow \mathbf{0}$$

Es genügt also zu zeigen, dass ι surjektiv ist, da dann aufgrund der Exaktheit $H_0(X^n, X^{n-1}) = \mathbf{0}$ folgt. Betrachte dazu

$$\begin{array}{ccc} C_0(X^{n-1}) & \xleftarrow{i} & C_0(X^n) \\ \downarrow p & \circlearrowleft & \downarrow q \\ H_0(X^{n-1}) & \xrightarrow{\iota} & H_0(X^n) \end{array}$$

Sei $a = q(x) \in H_0(X^n)$. Wir konstruieren nun ein Urbild von x unter i : Dies zeigt dann, dass $q \circ i = \iota \circ p$ surjektiv ist. Ist aber $\iota \circ p$ surjektiv, so ist insbesondere auch ι surjektiv.

Es genügt, dies für den Fall zu zeigen, dass $x \in X^n$ ein einzelner Punkt ist: Ist nämlich x Linearkombination von Punkten, so hätte unter dieser Voraussetzung jeder dieser Punkte ein Urbild unter i , und i ist \mathbb{Z} -linear.

Wenn $x \in X^{n-1} \subseteq X^n$ ist, so haben wir bereits ein Urbild gefunden. Andernfalls wählen wir einen Weg $\lambda : \Delta_{\text{top}}^1 \cong \mathbb{I} \rightarrow X^n$ von $y \in X^{n-1}$ nach x und erhalten $q(y) = q(y + x - x) = q(x)$ da $y - x$ Rand (von λ) ist. Wir ersetzen also x durch y und sind fertig. \square

Korollar 11.12. *Sei X ein CW-Komplex. Für jedes q induziert dann die Inklusion $X^q \hookrightarrow X$ einen Epimorphismus $H_q(X^q) \twoheadrightarrow H_q(X)$ und einen Isomorphismus $H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist (X^{n+1}, X^n) ein Raumpaar. Die zugehörige lange exakte Sequenz ist

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X^{n+1}, X^n) \rightarrow H_q(X^n) \rightarrow H_q(X^{n+1}) \rightarrow H_q(X^{n+1}, X^n) \rightarrow \cdots$$

und nach 11.11 gilt

$$\begin{aligned} H_{q+1}(X^{n+1}, X^n) &= \mathbf{0} & \text{falls } q+1 \neq n+1 \Leftrightarrow q \neq n, \\ H_q(X^{n+1}, X^n) &= \mathbf{0} & \text{falls } q \neq n+1. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Exaktheit $H_q(X^n) \cong H_q(X^{n+1})$, falls sowohl $q \neq n$ als auch $q \neq n+1$. Ist X endlich-dimensional, so gilt also

$$H_q(X^{q+1}) \cong H_q(X^{q+2}) \cong \cdots \cong H_q(X^{\dim(X)}) = H_q(X).$$

Falls lediglich $q \neq n+1$, so erhalten wir die entsprechende Aussage für Surjektionen anstelle von Isomorphismen. Falls X nicht endlich-dimensional ist, verwendet man erneut, dass Homologie und Kolimes vertauschen, i.e.

$$H_q(X) = H_q(\text{colim } X^n) = \text{colim } H_q(X^n). \quad \square$$

Korollar 11.13. Sei X ein CW-Komplex. Aus $\kappa_X(q) = 0$ folgt $H_q(X) = \mathbf{0}$. Insbesondere gilt

$$q > \dim(X) \implies H_q(X) = \mathbf{0}.$$

Beweis. Wir haben in 11.12 schon etabliert, dass $H_q(X^n) \cong H_q(X^{n+1})$, falls $q \notin \{n, n+1\}$. Da nun $X^q = X^{q-1}$, liefert

$$H_q(X^q) \cong H_q(X^{q-1}) \cong H_q(X^{q-2}) \cong \dots \cong H_q(X^0) \cong H_q(X^{-1}) = \mathbf{0}$$

die Aussage. □

Proposition-Definition 11.14. Für jeden CW-Komplex X sei

$$Z_n^{\text{CW}}(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

die gemäß 11.11 frei abelsch von den n -Zellen erzeugte Gruppe. Diese heißt auch die **n -te zelluläre Kettengruppe**.

Wir betrachten nun den folgenden Zusammchnitt der langen exakten Sequenzen der Raumpaare (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) und (X^{n-1}, X^{n-2}) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \vdots & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & H_n(X^{n-1}) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(X^n) & \longrightarrow & H_n(X^{n+1}) \longrightarrow \cdots \\
 & & \searrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
 & & & & H_n(X^n, X^{n-1}) & & \\
 & & & & \downarrow & \searrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-2}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

und definieren ein Differential $d_{n+1} := p_n \circ \delta_{n+1}$. Man kann am obigen Diagramm direkt ablesen, dass die zellulären Kettengruppen dadurch zu einem Kettenkomplex werden. Dies ermöglicht uns nun die folgende □

Definition 11.15 (Zelluläre Homologie). Für einen CW-Komplex X heißt

$$H_\bullet^{\text{CW}}(X) := H_\bullet(Z_\bullet^{\text{CW}}(X), d)$$

die **zelluläre Homologie** von X .

Theorem 11.16. Sei X ein beliebiger CW-Komplex. Dann induziert die Abbildung $p : H_\bullet(X) \rightarrow Z_\bullet^{\text{CW}}(X)$ einen Isomorphismus

$$H_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} H_\bullet^{\text{CW}}(X).$$

Bemerkung. Hierbei ist p_n die Abbildung aus der langen exakten Sequenz des Raumpaars (X^n, X^{n-1}) , wie in 11.14. Es erweist sich als überaus nützlich, den Beweisverlauf in dem dort angezeigten Diagramm nachzuvollziehen.

Beweis. Gemäß 11.13 ist $H_n(X^{n-1}) = \mathbf{0}$, also p_n injektiv. Daraus folgt nun, dass

$$\ker(d_n) = \ker(p_{n-1} \circ \delta_n) = \ker(\delta_n) = \text{im}(p_n)$$

Gemäß 11.12 ist $i_n : H_n(X^n) \rightarrow H_n(X)$ aus der langen exakten Sequenz des Raumpaars (X, X^n) ein Epimorphismus. Betrachten wir dann den folgenden Ausschnitt besagter Sequenz,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, X^n) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n+1}} & H_n(X^n) & \xrightarrow{i_n} & H_n(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow j_{n+1} & \circlearrowleft & \nearrow \delta_{n+1} & & & & \\ & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & & & & & & \end{array}$$

so existiert das eingezeichnete kommutative Dreieck aufgrund der Natürlichkeit der langen Exakten Sequenz (siehe auch [NIK, 1.4]). Wir behaupten nun, dass j_{n+1} surjektiv ist: Dann nämlich ist

$$\text{im}(d_{n+1}) = p(\text{im}(\delta_{n+1})) = \text{im}(\tilde{\delta}_{n+1}) = p(\ker(i_n)),$$

woraus mit unseren anderen Vorüberlegungen zusammen folgt, dass

$$H_n^{\text{CW}}(X) = \frac{\ker(d_n)}{\text{im}(d_{n+1})} = \frac{\text{im}(p_n)}{p_n(\ker(i_n))} \cong \frac{H_n(X^n)}{\ker(i_n)} \cong H_n(X).$$

Es genügt also die Surjektivität von j_{n+1} zu zeigen. Wir betrachten zunächst unter Anwendung von 11.12 die lange exakte Sequenz des Raumpaars (X, X^{n+1})

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_{n+1}(X, X^{n+1}) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H_n(X^{n+1}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

um zu folgern, dass $H_{n+1}(X, X^{n+1}) = \mathbf{0}$. Daraus ergibt sich die Aussage, indem wir den passenden Ausschnitt in der langen exakten Sequenz des Tripels (X, X^{n+1}, X^n) betrachten (siehe auch [NIK, 2.5]):

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{j_{n+1}} H_{n+1}(X, X^n) \longrightarrow H_{n+1}(X, X^{n+1}) = \mathbf{0}$$

□

Korollar 11.17. Sei X ein CW-Komplex.

1. Ist $\dim(X) = n < \infty$, so gilt für alle $q > n$, dass $H_q(X) = \mathbf{0}$.
2. Ist X kompakt, so ist $H_\bullet(X)$ endlich erzeugt.

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich, die zweite folgt, da X gemäß 11.8 endlich ist. \square

Beispiel 11.18. Die Homologie des Komplex-Projektiven Raums ist

$$H_q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad q \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\} \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist offensichtlich, da $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ein CW-Komplex mit genau einer Zelle in jeder "geraden" Dimension ist.

Bemerkung 11.19. Man kann auch zeigen, dass die Homologie des Reell-Projektiven Raums gegeben ist als

$$H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad q = 0 \\ \mathbb{Z} & ; \quad q = n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/(2) & ; \quad q \text{ ungerade, } 0 < q < n \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Der tapfere Leser möge sich für einen Beweis an [SZ, 9.9.14] wenden.

12 Homologie mit Koeffizienten

Es gibt nicht nur den einen Ring.

Definition 12.1. Sei X ein topologischer Raum, R ein beliebiger kommutativer Ring mit Eins. Dann setzen wir

$$C_{\bullet}(X, R) := \tilde{N}(R[S(X)]) \quad H_{\bullet}(X, R) := H_{\bullet}(C_{\bullet}(X, R))$$

den **singulären Kettenkomplex von X mit Koeffizienten in R** bzw. die **n -te Homologiegruppe von X mit Koeffizienten in R** .

Alles, was bisher für $H_{\bullet}(\cdot) = H_{\bullet}(\cdot, \mathbb{Z})$ galt, gilt auch für $H_{\bullet}(\cdot, R)$. Insbesondere Homotopieinvarianz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris, etcetera. Dies ist banal, da wir auf die speziellen Eigenschaften von \mathbb{Z} als Koeffizientenring nie eingegangen sind.

13 Tor und andere Linksderivierte

Alles spaltet, alles ist frei.

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Dann wird das Tensorprodukt zu einem Funktor $(\cdot) \otimes_R M : \mathbf{Mod}_R \Rightarrow \mathbf{Ab}$ durch

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L \otimes_R M \\ \downarrow f & & \downarrow f \otimes \text{id} \\ N & \longrightarrow & N \otimes_R M \end{array}$$

Ist A eine kommutative R -Algebra, d.h. $\varphi : R \rightarrow A$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, so ist $(\cdot) \otimes_R A$ ein Funktor $\mathbf{Mod}_R \Rightarrow \mathbf{Mod}_A$.

Definition 13.1. Seien A und B kommutative Ringe.

1. Ein Funktor $F : \mathbf{Mod}_B \Rightarrow \mathbf{Mod}_A$ heißt **additiv**, falls F für alle Objekte $M, N \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}_B)$ einen Homomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathbf{Mod}_B}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Mod}_A}(F(M), F(N))$$

von abelschen Gruppen induziert.

2. Ein additiver Funktor heißt **linksexakt**, wenn er für jede Abbildung $f : M \rightarrow N$ in \mathbf{Mod}_B die eindeutige (siehe 2.2, 1) Abbildung h in

$$\begin{array}{ccccc} \ker(F(f)) & \longleftarrow & F(M) & \xrightarrow{F(f)} & F(N) \\ & \swarrow h & \uparrow F(\iota) & \nearrow \mathbf{0} = F(\mathbf{0}) & \\ & & F(\ker(f)) & & \end{array}$$

ein Isomorphismus $h : F(\ker(f)) \xrightarrow{\sim} \ker(F(f))$ ist.

3. F heißt **rechtsexakt**, falls die dual zu 2 äquivalent induzierte Abbildung $\text{coker}(F(f)) \xrightarrow{\sim} F(\text{coker}(f))$ ein Isomorphismus ist.
4. F heißt **exakt**, falls er links- und rechtsexakt ist.

Bemerkung. Linksexakte Funktoren erhalten Injektionen, rechtsexakte Funktoren erhalten Surjektionen. Die Definition additiver Funktoren gilt allgemeiner für additive Kategorien. Die Definition von links- oder rechtsexakten Funktoren ebenso.

Beispiel 13.2. Sei M ein R -Modul Die Funktoren

1. $(\cdot) \otimes_R M : \mathbf{Mod}_R \rightrightarrows \mathbf{Ab}$
2. $M \otimes_R (\cdot) : \mathbf{Mod}_R \rightrightarrows \mathbf{Ab}$
3. $\text{Hom}(\cdot, M) : \mathbf{Mod}_R^{\text{op}} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$
4. $\text{Hom}(M, \cdot) : \mathbf{Mod}_R \rightrightarrows \mathbf{Ab}$

sind alle additiv. Der Beweis sei dem fleißigen Leser als Übung überlassen.

Fakt 13.3. Sei F ein additiver Funktor. Dann gilt:

1. Es ist $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (sowohl für $\mathbf{0}$ -Morphismen als auch für $\mathbf{0}$ -Objekte).
2. F erhält direkte Summen, d.h. es existiert ein kanonischer Isomorphismus $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$.

Beweis. Die erste Aussage folgt für Morphismen direkt aus der Definition und für $\mathbf{0}$ -Objekte aus der zweiten Aussage, denn

$$F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) \oplus F(\mathbf{0}).$$

Wenn wir nun ein Objekt T der Zielkategorie haben und

$$\begin{array}{ccccc}
 F(\mathbf{0}) & \xrightarrow{F(\mathbf{0})=\mathbf{0}} & F(\mathbf{0}) & \xleftarrow{F(\mathbf{0})=\mathbf{0}} & F(\mathbf{0}) \\
 & \searrow \mathbf{0} & \downarrow \exists! h & \swarrow \mathbf{0} & \\
 & & T & &
 \end{array}$$

so besagt die universelle Eigenschaft des Biprodukts $F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) \oplus F(\mathbf{0})$, dass genau *ein* morphismus h mit der Eigenschaft existiert, dass obiges Diagramm kommutiert. Diese Eigenschaft besitzt jeder Morphismus $F(\mathbf{0}) \rightarrow T$, also existiert nur ein solcher Morphismus - für beliebiges T . Also ist $F(\mathbf{0})$ ein Initialobjekt und damit Nullobjekt.

Wir beweisen nun, dass F Biprodukte erhält. Betrachte dazu das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(M \oplus N) & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 F(M) & & \beta \uparrow \alpha & & F(N) \\
 & \searrow \hat{i} & \downarrow & \swarrow \hat{j} & \\
 & & F(M) \oplus F(N) & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} \text{---} F(p) \text{---} \\ \text{---} F(q) \text{---} \\ \text{---} \hat{p} \text{---} \\ \text{---} \hat{q} \text{---} \end{array}$

Hier sind p, q die Projektionen und i, j die Inklusionen von $M \oplus N$, dementsprechend sind \hat{p}, \hat{q} die Projektionen und \hat{i}, \hat{j} die Inklusionen von $F(M) \oplus F(N)$.

Gemäß der universellen Eigenschaft von Produkt und Koproduct erhalten wir dann eindeutige Abbildungen

$$\alpha : F(M) \oplus F(N) \rightarrow F(M \oplus N) \text{ und } \beta : F(M \oplus N) \rightarrow F(M) \oplus F(N)$$

so dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{array}{llll} & F(i) = \alpha \circ \hat{i} & \text{und} & F(j) = \alpha \circ \hat{j}, \\ \text{sowie} & F(p) = \hat{p} \circ \beta & \text{und} & F(q) = \hat{q} \circ \beta. \end{array}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit können wir dann die Abbildungen sogar konkret angeben:

$$\alpha = F(j) \circ \hat{q} + F(i) \circ \hat{p} \quad \beta = \hat{i} \circ F(p) + \hat{j} \circ F(q).$$

Zum Beweis dieser Formeln müssen wir nur prüfen, dass diese Definition die oben genannten Beziehungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha \circ \hat{i} &= F(j) \circ \hat{q} \circ \hat{i} + F(i) \circ \hat{p} \circ \hat{i} = F(j) \circ \mathbf{0} + F(i) \circ \text{id} = F(i) \\ \hat{p} \circ \beta &= \hat{p} \circ \hat{i} \circ F(p) + \hat{q} \circ \hat{j} \circ F(q) = \text{id} \circ F(p) + \mathbf{0} \circ F(q) = F(p) \end{aligned}$$

und äquivalent für $\alpha \circ \hat{j}$ bzw. $\hat{q} \circ \beta$. Durch diese expliziten Formeln ist es nun leicht, zu prüfen, dass α und β zueinander invers sind:

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha &= (\hat{i} \circ F(p) + \hat{j} \circ F(q)) \circ (F(j) \circ \hat{q} + F(i) \circ \hat{p}) \\ &= \hat{i} \circ F(pj) \circ \hat{q} + \hat{i} \circ F(pi) \circ \hat{p} + \hat{j} \circ F(qj) \circ \hat{q} + \hat{j} \circ F(qi) \circ \hat{p} \\ &= \hat{i} \circ \hat{p} + \hat{j} \circ \hat{q} = \text{id} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= (F(j) \circ \hat{q} + F(i) \circ \hat{p}) \circ (\hat{i} \circ F(p) + \hat{j} \circ F(q)) \\ &= F(j) \circ \hat{q} \circ \hat{i} \circ F(p) + F(j) \circ \hat{q} \circ \hat{j} \circ F(q) \\ &\quad + F(i) \circ \hat{p} \circ \hat{i} \circ F(p) + F(i) \circ \hat{p} \circ \hat{j} \circ F(q) \\ &= F(j) \circ F(q) + F(i) \circ F(p) = F(jq + ip) = F(\text{id}) = \text{id} \end{aligned}$$

wobei wir ganz zum Schluss einmal Additivität des Funktors verwenden mussten und die Tatsache, dass für die Inklusionen und Projektionen von Biproducten die Beziehungen $qi = pj = \mathbf{0}$, $qj = pi = \text{id}$ und $ip + jq = \text{id}$ gelten. \square

Proposition 13.4. *Sei $F : \mathbf{Mod}_B \rightrightarrows \mathbf{Mod}_A$ ein additiver Funktor.*

1. *F ist linksexakt genau dann, wenn für alle exakten Sequenzen*

$$\mathbf{0} \longrightarrow K \xleftarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N \text{ in } \mathbf{Mod}_B$$

die entsprechende Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(K) \xrightarrow{F(\iota)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \text{ in } \mathbf{Mod}_A$$

ebenfalls exakt ist.

2. F ist rechtsexakt genau dann, wenn für alle exakten Sequenzen

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{Mod}_B$$

die entsprechende Sequenz

$$F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \xrightarrow{F(\pi)} F(C) \longrightarrow \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{Mod}_A$$

ebenfalls exakt ist.

3. F ist exakt genau dann, wenn für alle kurzen exakten Sequenzen

$$\mathbf{0} \longrightarrow L \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{Mod}_B$$

auch die entsprechende kurze Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \longrightarrow \mathbf{0} \text{ in } \mathbf{Mod}_A$$

exakt ist.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus Definition 13.1 wegen $K \cong \ker(f)$ bzw. $C \cong \operatorname{coker}(g)$. Wir beweisen daher nur die letzte Aussage. Notwendigkeit folgt aus den ersten beiden Aussagen, da F insbesondere rechts- und linksexakt ist. Es genügt also, zu zeigen, dass das Kriterium auch hinreichend ist.

Angenommen also, F bildet jede keS wieder auf eine keS ab. Betrachte dann zunächst das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(f) & \xleftarrow{\iota} & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{p} & \operatorname{coker}(f) \\
 & & & & \downarrow \pi & \circlearrowleft & \uparrow i & & \\
 & & & & \operatorname{im}(f) & \xleftarrow{\iota} & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathbf{0} & & & &
 \end{array}$$

Es enthält die kurzen exakten Sequenzen

$$\mathbf{0} \rightarrow \ker(f) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{im}(f) \rightarrow \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{0} \rightarrow \operatorname{im}(f) \hookrightarrow N \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(f) \rightarrow \mathbf{0}.$$

Da F diese erhält, erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & F(\ker(f)) & \xrightarrow{F(\iota)} & F(M) & \xrightarrow{F(f)} & F(N) \\
 & & & & \downarrow F(\pi) & \circlearrowleft & \uparrow F(i) \\
 & & & & F(\operatorname{im}(f)) & \xleftarrow{\iota} &
 \end{array}$$

mit $F(i)$ injektiv und somit

$$\operatorname{im}(F(\iota)) = \ker(F(\pi)) = \ker(F(\pi) \circ F(i)) = \ker(F(f)).$$

Durch ein duales Argument zeigt man, dass F auch Cokerne erhält. □

Proposition 13.5. *Der Funktor $M \otimes_R (\cdot) : \mathbf{Mod}_R \rightrightarrows \mathbf{Ab}$ ist rechtsexakt.*

Beweis. Betrachte eine exakte Sequenz

$$N' \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} N'' \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Sei $x'' \in N''$ und $y \in M$. Es existiert dann ein $x \in N$ mit $\psi(x) = x''$, d.h.

$$y \otimes x \xrightarrow{\text{id} \otimes \psi} y \otimes x''.$$

Damit ist zumindest $\text{id} \otimes \psi$ surjektiv. Es ist auch $(\text{id} \otimes \psi) \circ (\text{id} \otimes \varphi) = \mathbf{0}$, da $\psi \circ \varphi = \mathbf{0}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\ker(\text{id} \otimes \psi) \subseteq \text{im}(\text{id} \otimes \varphi) =: I$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \otimes N' & & \\
 & \swarrow & \downarrow \text{id} \otimes \varphi & & \\
 I & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varphi} & M \otimes N & \xrightarrow{\pi} & \\
 & \searrow \mathbf{0} & \downarrow \text{id} \otimes \psi & \circlearrowleft & \\
 & & M \otimes N'' & \xleftarrow{\exists f} & \text{coker}(\text{id} \otimes \varphi) = (M \otimes N)/I
 \end{array}$$

Wir konstruieren nun ein

$$g : M \otimes N'' \longrightarrow (M \otimes N)/I$$

mit $g \circ f = \text{id}$, um zu beweisen, dass f eine Injektion und damit ein Isomorphismus ist. Daraus folgt dann

$$\ker(\text{id} \otimes \psi) \cong \ker(\pi) = I.$$

Definiere dazu $g(y \otimes x'') := \overline{y \otimes x}$ wobei $x \in \psi^{-1}(x'')$ beliebig gewählt ist. Um einzusehen, dass dies Wohldefiniert ist, seien $x_1, x_2 \in \psi^{-1}(x'')$. Wir erhalten dann $x_1 - x_2 \in \ker(\psi) = \text{im}(\varphi)$, etwa $x_1 - x_2 = \varphi(x')$ und somit

$$\overline{y \otimes x_1} = \overline{y \otimes x_2 + \varphi(x')} = \overline{y \otimes x_2} + \underbrace{\overline{y \otimes \varphi(x')}}_{\mathbf{0} \text{ mod } I} = \overline{y \otimes x_2}.$$

Offensichtlich gilt dann

$$(g \circ f)(\overline{y \otimes x}) = g(y \otimes \psi(x)) = \overline{y \otimes x}.$$

womit also $g \circ f = \text{id}$ und die Aussage bewiesen ist. \square

Proposition 13.6. *Der Funktor $M \otimes_R (\cdot) : \mathbf{Mod}_r \rightrightarrows \mathbf{Ab}$ ist exakt falls M frei über R ist.*

Beweis. Sei M frei, etwa $M \cong \bigoplus_i R$. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & M \otimes N' & \xleftarrow{\iota} & M \otimes N & \xrightarrow{\pi} & M \otimes N'' & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \bigoplus_i N' & \xleftarrow{\bigoplus_i \iota} & \bigoplus_i N & \xrightarrow{\bigoplus_i \pi} & \bigoplus_i N'' & &
 \end{array}$$

womit wir bereits fertig sind. \square

Beispiel 13.7. Sei A ein kommutativer Integritätsbereich und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist $(\cdot) \otimes_A A_S$ linksexakt, also exakt. Mit anderen Worten, Lokalisieren ist exakt. Insbesondere ist damit $(\cdot) \otimes_A \text{Quot}(A)$ exakt, etwa $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass der Funktor $(\cdot) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$ im Allgemeinen *nicht* exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}/(n) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/(n) & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/(n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Z}/(n) & \longrightarrow & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Proposition 13.8. Die Funktoren

$$\begin{array}{l}
 \text{Hom}_R(M, \cdot) : \mathbf{Mod}_R \rightleftarrows \mathbf{Ab} \\
 \text{Hom}_R(\cdot, M) : \mathbf{Mod}_R^{\text{op}} \rightleftarrows \mathbf{Ab}
 \end{array}$$

sind linksexakt.

Beweis. Betrachte die exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow \ker(\varphi) \cong K \xleftarrow{\iota} N \xrightarrow{\varphi} L .$$

Unter $\text{Hom}(M, \cdot)$ erhalten wir die Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow \text{Hom}(M, K) \xrightarrow{\iota \circ (\cdot)} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\varphi \circ (\cdot)} \text{Hom}(M, L) .$$

Nun ist für $\alpha \in \text{Hom}(M, K)$ mit $\alpha \circ \iota = \mathbf{0}$ zwangsläufig $\alpha = \mathbf{0}$, da ι injektiv ist. Ist andererseits $\beta \in \text{Hom}(M, N)$ mit $\varphi \circ \beta = \mathbf{0}$, so erhalten wir gemäß universeller Eigenschaft des Kerns (siehe auch 2.2) eine Abbildung $\tilde{\beta} : M \rightarrow \ker(\varphi) = K$ mit $\iota \circ \tilde{\beta} = \beta$. Dies ist nichts weiter als Exaktheit bei $\text{Hom}(M, N)$.

Wir betrachten nun das folgende Diagramm in $\mathbf{Mod}_R^{\text{op}}$:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \ker(\varphi^{\text{op}}) \cong C \xleftarrow{\pi^{\text{op}}} N \xrightarrow{\varphi^{\text{op}}} L ,$$

welches einer exakten Sequenz

$$\mathbf{0} \longleftarrow \text{coker}(\varphi) \cong C \xleftarrow{\pi} N \xleftarrow{\varphi} L$$

in \mathbf{Mod}_R entspricht.

Die Situation ist nun dual zum ersten Fall: Unter $\text{Hom}(\cdot, M)$ erhalten wir

$$\mathbf{0} \longrightarrow \text{Hom}(C, M) \xrightarrow{(\cdot) \circ \pi} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{(\cdot) \circ \varphi} \text{Hom}(L, M) .$$

und für $\alpha \in \text{Hom}(C, M)$ mit $\alpha \circ \pi = \mathbf{0}$ folgt aufgrund der Surjektivität von π sofort $\alpha = \mathbf{0}$. Ist andererseits $\beta \in \text{Hom}(N, M)$ mit $\beta \circ \varphi = \mathbf{0}$, so erhalten wir aufgrund der Universellen Eigenschaft des Cokerns eine Abbildung $\bar{\beta} : \text{coker}(\varphi) \cong C \rightarrow M$ mit $\bar{\beta} \circ \pi = \beta$, was wiederum Exaktheit bei $\text{Hom}(N, M)$ entspricht. \square

Proposition-Definition 13.9. Eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow M \xleftarrow{i} N \xrightarrow{p} C \longrightarrow \mathbf{0}$$

in \mathbf{Mod}_R heißt **spaltend**, falls eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gilt $N \cong C \oplus M$ mit p als Projektion des ersten Faktors M und i als Inklusion des zweiten Faktors C .
2. Es existiert ein $s : C \rightarrow M$ mit $p \circ s = \text{id}_C$.
3. Es existiert ein $t : N \rightarrow M$ mit $t \circ i = \text{id}_M$.

Bemerkung. Die Situation ist also die folgende

$$\mathbf{0} \longrightarrow M \begin{array}{c} \xleftarrow{i} \\ \xleftarrow{t} \end{array} N \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{s} \end{array} C \longrightarrow \mathbf{0} ,$$

wobei wir sehen werden, dass der Isomorphismus $N \xrightarrow{\sim} C \oplus M$ durch $p \oplus t$ gegeben ist, mit der inversen Abbildung $s \oplus i$.

Beweis. (2 \Leftrightarrow 3): Sei zunächst s die Abbildung gemäß 2. Wegen

$$p \circ (\text{id}_N - s \circ p) = p - p = \mathbf{0}$$

erhalten wir eine vom Kern $\ker(p) = \text{im}(i)$ induzierte Abbildung $t' : N \rightarrow \text{im}(i)$ mit $j \circ t' = \text{id}_N - s \circ p$, wobei

$$\begin{array}{c} \overbrace{M \xrightarrow{\cong} \text{im}(i) \xleftarrow{j} N}^i \\ \psi \end{array}$$

Dann setzen wir $t := \psi^{-1} \circ t'$. Damit erhalten wir $j \circ t' \circ i = i = j \circ \psi$ und aufgrund der Injektivität von j dann $t' \circ i = \psi$ bzw. $t \circ i = \text{id}_M$ wie gefordert.

Sei andererseits t wie in 3 gegeben. Dann gilt dual

$$(\text{id}_N - i \circ t) \circ i = i - i = \mathbf{0}$$

und wir erhalten eine vom Cokern induzierte Abbildung $s' : \text{coker}(i) \rightarrow N$ mit $s' \circ q = \text{id}_N - i \circ t$, wobei wir

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{coker}(i) \cong \text{im}(p) & & \\
 & & \uparrow q & \nearrow & \parallel \\
 M & \xleftarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & C \\
 & \searrow & \downarrow j & & \\
 & & \text{im}(i) = \text{ker}(p) & &
 \end{array}$$

betrachten. Außerdem ist $\varphi : \text{coker}(i) \cong \text{coker}(j) = \text{im}(p) \cong C$ ein kanonischer Isomorphismus. Sei $s := s' \circ \varphi^{-1}$, dann folgt aus $p \circ s' \circ q = p = \varphi \circ q$ aufgrund der Surjektivität von q die Identität $p \circ s' = \varphi$, bzw. $p \circ s = \text{id}_C$.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, dass beide Argumentationen das gleiche Zwischenergebnis liefern:

$$s \circ p = s' \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ q = s' \circ q = \text{id}_N - i \circ t \quad (21)$$

$$i \circ t = j \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ t' = j \circ t' = \text{id}_N - s \circ p \quad (22)$$

Wir wollen noch zeigen, dass 2 und 3 äquivalent zu Bedingung 1 sind. Mit den Formeln

$$g = s \oplus i : C \oplus M \longrightarrow N \text{ und } f = p \oplus t : N \longrightarrow C \oplus M$$

können wir unter Zuhilfenahme von (21) oder (22) zunächst leicht prüfen, dass f und g Isomorphismen sind:

$$\begin{aligned}
 f \circ g &= (p \circ s) \oplus (t \circ i) = \text{id}_C \oplus \text{id}_M = \text{id}_{C \oplus M} \\
 g \circ f &= (s \circ p) + (i \circ t) = \text{id}
 \end{aligned}$$

Andererseits induziert aber auch jeder Isomorphismus dieser Form Morphismen s und t mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Proposition-Definition 13.10. Ein R -Modul P heißt **projektiv**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Für beliebige R -Moduln B und C mit Morphismen $\gamma : P \rightarrow C$ und $\pi : B \rightarrow C$ ein $\beta : P \rightarrow B$ mit $\pi \circ \beta = \gamma$ existiert.

Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \exists \beta \swarrow & \downarrow \forall \gamma & \\
 B & \xrightarrow{\forall \pi} & C \longrightarrow \mathbf{0}
 \end{array}$$

2. P ist direkter Summand eines freien Moduls.

Beweis. Sei $F(P)$ der freie Modul erzeugt von Elementen in P . Dann existiert ein Epimorphismus

$$\pi : \begin{array}{ccc} F(M) & \longrightarrow & M \\ \sum_i r_i m_i & \longmapsto & \sum_i r_i \cdot m_i \end{array}$$

welcher formale Linearkombinationen auf tatsächliche abbildet. Falls P projektiv ist, haben wir also

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow \exists \beta & \downarrow \text{id} \\ F(P) & \xrightarrow{\pi} & P \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Damit ist also die Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow \ker(\pi) \longleftarrow F(P) \xleftarrow[\beta]{\pi} P \longrightarrow \mathbf{0}$$

gemäß Bedingung 2 aus 13.9 spaltend und damit $F(P) \cong P \oplus \ker(\pi)$ direkter Summand eines freien Moduls.

Sei umgekehrt $P \oplus N$ frei. Wir wollen zeigen, dass P projektiv ist - seien also die entsprechenden Moduln B, C und Morphismen γ, π wie in Bedingung 1 gegeben. Sei weiterhin $\{e_i \mid i \in I\}$ eine Basis von $P \oplus N$.

$$\begin{array}{ccc} P \oplus N & \xleftarrow[i_P]{p_P} & P \\ \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \gamma \\ B & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

Es hat nun $\gamma(p_P(e_i))$ ein Urbild b_i unter π und wir definieren $\bar{\beta}(e_i)$ durch $e_i \mapsto b_i$. Diese Abbildung ist zwar nicht eindeutig, jedoch erzwungenermaßen linear mit

$$\pi(\bar{\beta}(e_i)) = \pi(b_i) = \gamma(p_P(e_i)).$$

Mit anderen Worten, $\gamma \circ p_P = \pi \circ \bar{\beta}$. Dann definieren wir $\beta := \bar{\beta} \circ i_P$ und erhalten

$$\pi \circ \beta = \pi \circ \bar{\beta} \circ i_P = \gamma \circ p_P \circ i_P = \gamma$$

wie gewünscht. □

Beispiel 13.11. 1. Über Körpern ist jeder Modul frei, demnach also auch projektiv. Dies gilt ebenso über \mathbb{Z} . Dies ist im endlichen Fall offensichtlich aufgrund des Klassifikationssatzes, da $\mathbb{Z}/(n)$ bereits direkter Summand eines freien Moduls ist.

2. Das Ideal $(3, \sqrt{-5} + 2) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist projektiv, aber nicht frei.

3. Mit $R = M_n(k)$ ist k^n als Links- und Rechts- R -Modul projektiv, aber nicht frei.

Proposition-Definition 13.12. Ein R -Modul M heißt **flach**, wenn $(\cdot) \otimes_R M$ exakt ist. Projektive Moduln sind flach.

Bemerkung. Wir haben in 13.6 bereits gesehen, dass freie Moduln flach sind. Die Umkehrung gilt nicht – ist A nullteilerfrei, so ist $\text{Quot}(A)$ ein flacher Modul, welcher nicht projektiv, geschweige denn frei ist. Beispiel 13.7 zeigt, dass $\mathbb{Z}/(n)$ als \mathbb{Z} -Modul nicht flach ist.

Beweis. Ein projektiver Modul M ist Summand eines freien Moduls F , etwa $F = M \oplus N$. Haben wir nun eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow \mathbf{0},$$

so bleibt gemäß 13.5 noch zu zeigen, dass in

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \otimes_R M \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}_M} B \otimes_R M \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}_M} C \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{0}$$

die Abbildung $\iota \otimes \text{id}_M$ injektiv ist. Wir wissen aus 13.6 bereits, dass die Abbildung

$$\iota \otimes \text{id}_F : A \otimes_R F \longrightarrow B \otimes_R F$$

injektiv ist. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} a \otimes m \in \ker(\iota \otimes \text{id}_M) &\Rightarrow (\iota \otimes \text{id}_F)(a \otimes m) = \iota(a) \otimes m = (\iota \otimes \text{id}_M)(a \otimes m) = 0 \\ &\Rightarrow a \otimes m \in \ker(\iota \otimes \text{id}_F) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. \square

Problem. Sei F ein rechtsexakter Funktor, der nicht linksexakt ist. Wir fragen uns nun, ob wir für eine gegebene, kurze exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

die zugehörige Sequenz

$$F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \longrightarrow \mathbf{0}$$

als exakte Sequenz nach links verlängern können. Zu diesem Zweck werden wir Funktoren $L_n F$ für $n \geq 0$ konstruieren, so dass wir eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_2 F(M') & \longrightarrow & L_2 F(M) & \longrightarrow & L_2 F(M'') \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & L_1 F(M') \longrightarrow L_1 F(M) \longrightarrow L_1 F(M'') \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & L_0 F(M') \longrightarrow L_0 F(M) \longrightarrow L_0 F(M'') \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

erhalten, wobei $L_0 F = F$ gilt. Die zentrale Idee ist die Folgende:

Definition 13.13. Eine **Auflösung** von M ist eine exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{0},$$

auch $P_\bullet \rightarrow M$ geschrieben. Wir nennen $P_\bullet \rightarrow M$ eine **projektive Auflösung** falls P_i für alle $i \geq 0$ projektiv ist. P_\bullet bezeichnet in dieser Schreibweise den Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

mit P_i im Grad i .

Bemerkung. Wir werden $L_n F(M) := H_n(F(P_\bullet))$ definieren und fragen uns:

1. Existiert immer eine projektive Auflösung?
2. Ist $L_n F(M)$ unabhängig von der Wahl einer solchen Auflösung?

Lemma 13.14. *Sei M ein R -Modul. Dann existiert eine projektive Auflösung von M in \mathbf{Mod}_R .*

Beweis. Wir erinnern uns an den Beweis von 13.10. Es existiert immer ein Epimorphismus $\pi : F(M) \twoheadrightarrow M$ und $F(M)$ ist als freier Modul insbesondere projektiv. Man erhält nun induktiv

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \ker(\pi_0) & \hookrightarrow & P_0 := F(M) & \xrightarrow{\pi_0} M \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & & & \uparrow \pi_1 & & \nearrow & \\
 \ker(\pi_1) & \hookrightarrow & P_1 := F(\ker(\pi_0)) & & & & \\
 \uparrow \pi_2 & & \nearrow & & & & \\
 P_2 := F(\ker(\pi_1)) & & & & & &
 \end{array}$$

eine projektive Auflösung. □

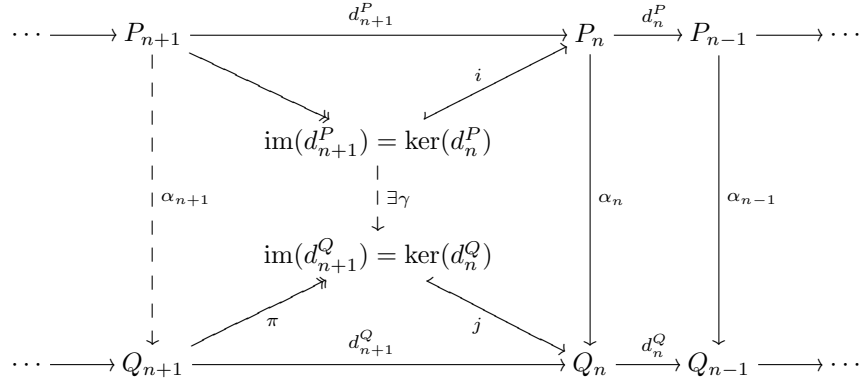
Bemerkung. In anderen abelschen Kategorien gibt es nicht immer projektive Auflösungen. Ein Beispiel ist die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen.

Proposition 13.15. *Sei $P_\bullet \rightarrow M$ eine projektive Auflösung und $Q_\bullet \rightarrow N$ eine beliebige Auflösung und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von R -Moduln. Dann existiert eine Kettenabbildung $\alpha : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ über f , d.h. folgendes Diagramm kommutiert*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \twoheadrightarrow & M \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow f \\
 \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \twoheadrightarrow & N \longrightarrow \mathbf{0}
 \end{array}$$

und α ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.

Beweis. Wir konstruieren α induktiv. Der Induktionsanfang ist durch $\alpha_{-1} = f$ und $\alpha_{-2} = \mathbf{0}$ gegeben. Betrachte dann:



Wegen

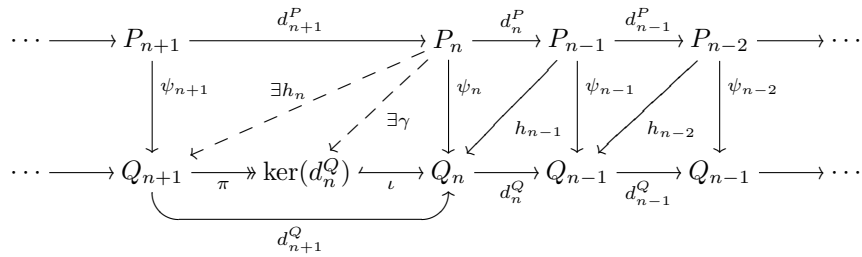
$$d_n^Q \circ \alpha_n \circ i = \alpha_{n-1} \circ d_n^P \circ i = \alpha_{n-1} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

erhalten wir eine Abbildung γ mit $j \circ \gamma = \alpha_n \circ i$ nach universeller Eigenschaft des Kerns. Da P_{n+1} projektiv ist erhalten wir die Abbildung α_{n+1} , die das gesamte Diagramm kommutativ macht. Es bleibt noch die Eindeutigkeit von α zu zeigen.

Sei dazu $\beta : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ eine andere Kettenabbildung über f . Setze $\psi := \alpha - \beta$. Wir konstruieren dann eine Kettenhomotopie $h_n : P_n \rightarrow Q_{n+1}$ induktiv. Da P_0 projektiv ist, erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
 P_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 \swarrow \exists h_0 & \downarrow \psi_0 & \swarrow h_{-1} := \mathbf{0} \\
 Q_1 & \longrightarrow & Q_0
 \end{array}$$

als Induktionsanfang. Nun betrachten wir im Induktionsschritt das Diagramm



Nach Induktionsvoraussetzung haben wir $d_n^Q \circ h_{n-1} = \psi_{n-1} - h_{n-2} \circ d_{n-1}^P$. Nun induziert der Morphismus

$$\phi := \psi_n - h_{n-1} \circ d_n^P : P_n \longrightarrow Q_n$$

wegen

$$\begin{aligned}
d_n^Q \circ \phi &= d_n^Q \circ \psi_n - d_n^Q \circ h_{n-1} \circ d_n^P \\
&= d_n^Q \circ \psi_n - (\psi_{n-1} - h_{n-2} \circ d_{n-1}^P) \circ d_n^P \\
&= d_n^Q \circ \psi_n - \psi_{n-1} \circ d_n^P = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

den Morphismus $\gamma : P_n \rightarrow \ker(d_n^Q)$. Da P_n projektiv ist, erhalten wir somit das gewünschte h_n , denn

$$d_{n+1}^Q \circ h_n = \iota \circ \pi \circ h_n = \iota \circ \gamma = \phi = \psi_n - h_{n-1} \circ d_n^P.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\alpha \simeq_h \beta$. □

Korollar 13.16. *Jede projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$ ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.*

Beweis. Seien P_\bullet und Q_\bullet zwei projektive Auflösungen von M . Nach 13.15 existieren Kettenabbildungen $\alpha : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ und $\beta : Q_\bullet \rightarrow P_\bullet$ über $\text{id}_M : M \rightarrow M$. Gemäß 13.15 ist jede Kettenabbildung $P_\bullet \rightarrow P_\bullet$ über id_M kettenhomotop zu id_{P_\bullet} , also zwangsläufig $\beta \circ \alpha \simeq \text{id}_{P_\bullet}$. Symmetrisch-äquivalent erhalten wir $\alpha \circ \beta \simeq \text{id}_{Q_\bullet}$. □

Definition 13.17. Sei $F : \mathbf{Mod}_B \rightrightarrows \mathbf{Mod}_A$ ein rechtsexakter Funktor. Dann definiert man die **linksderivierten Funktoren von F** auf Objekten durch

$$L_n F(M) := H_n(F(P_\bullet)) \text{ für eine projektive Auflösung } P_\bullet \rightarrow M.$$

wobei $F(P_\bullet)$ die Anwendung des Funktors auf den gesamten Kettenkomplex P_\bullet bezeichnet. Das Ergebnis ist wieder ein Kettenkomplex, da F additiv ist.

Bemerkung. Wir haben gesehen, dass projektive Auflösungen in \mathbf{Mod}_B immer existieren und sich nur bis auf Kettenhomotopie unterscheiden, d.h. kanonisch-isomorphe Homologien aufweisen.

Auf Morphismen $M \xrightarrow{f} N$ verwenden wir 13.15, um $L_n F(f) := H_n(F(\alpha))$ zu setzen, wobei $\alpha : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ für projektive Auflösungen $P_\bullet \rightarrow M$ und $Q_\bullet \rightarrow N$ der bis auf Kettenhomotopie eindeutige Morphismus über f ist. Der Ausdruck $F(\alpha)$ ist hier natürlich so zu verstehen, dass wir die Familie von Abbildungen $\{F(\alpha_n)\}$ aufgrund der Funktorialität von F als Kettenabbildung $F(\alpha) : F(P_\bullet) \rightarrow F(Q_\bullet)$ verstehen.

Bemerkung. $L_n F$ ist ein additiver Funktor. Da F und H_n additiv sind, genügt es, nachzuprüfen, dass die in 13.15 konstruierte Abbildung kompatibel mit der abelschen Gruppenstruktur ist. Dies sei dem Leser als Übung überlassen.

Proposition 13.18. *Es ist $L_0F(M) = F(M)$ und für jede kurze exakte Sequenz*

$$\mathbf{0} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

existiert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L_1F(M') & \longrightarrow & L_1F(M) & \longrightarrow & L_1F(M'') & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & \searrow & \\ & & & & & & & & L_0F(M') & \longrightarrow & L_0F(M) & \longrightarrow & L_0F(M'') & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

Beweis. Sei $P_\bullet \rightarrow M$ eine projektive Auflösung. Da F rechtsexakt ist, ist insbesondere die Sequenz

$$F(P_1) \xrightarrow{\theta} F(P_0) \xrightarrow{\pi} F(M) \longrightarrow \mathbf{0}$$

exakt. Daher ist

$$F(M) \cong \text{coker}(\theta) \cong F(P_0)/\text{im}(\theta) = \ker(\mathbf{0})/\text{im}(\theta) = H_0(F(P_\bullet)) = L_0F(M),$$

womit die erste Aussage bewiesen ist. Um die zweite zu beweisen, verwenden wir das weithin bekannte

Lemma 13.19 (Hufeisenlemma). *Sei*

$$\begin{array}{ccccccc} & & P'_\bullet & & P''_\bullet & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

mit projektiven Auflösungen $P'_\bullet \rightarrow M'$ und $P''_\bullet \rightarrow M''$. Dann ist $P_\bullet := P'_\bullet \oplus P''_\bullet$ eine projektive Auflösung von M und das ergänzte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & P'_\bullet & \hookrightarrow & P_\bullet & \twoheadrightarrow & P''_\bullet \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

kommutiert. □

Demzufolge ist also in unserem Fall

$$\mathbf{0} \longrightarrow P'_\bullet \longrightarrow P_\bullet \longrightarrow P''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine keS von Kettenkomplexen, die gradweise spaltet ($P_n \cong P'_n \oplus P''_n$). Demnach gilt $F(P_n) \cong F(P'_n) \oplus F(P''_n)$ und

$$\mathbf{0} \longrightarrow F(P'_\bullet) \longrightarrow F(P_\bullet) \longrightarrow F(P''_\bullet) \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist eine keS in $\text{Ch}(\mathbf{Mod}_A)$. Anwenden von 2.15 liefert die gewünschte, lange exakte Sequenz in der Homologie. □

Definition 13.20. Wir definieren nun $\text{Tor}_n^R(M, \cdot) := L_n(M \otimes_R (\cdot))$.

Bemerkung 13.21. Es gilt $L_n(M \otimes_R (\cdot))(N) = L_n((\cdot) \otimes_R N)(M)$.

Bemerkung 13.22. Man kann die gesamte Begriffsbildung bis zu diesem Punkt dualisieren und für linksexakte Funktoren F durch sogenannte die *rechtsderivierten* Funktoren $R^n F$ definieren.

Dazu verwendet man dann *injektive Auflösungen*.

Lemma 13.23. Sei M eine endlich erzeugte abelsche Gruppe (ein \mathbb{Z} -Modul).

1. Dann ist

$$\text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = \begin{cases} M & ; \quad q = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

2. und für $n \neq 0$ gilt

$$\text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/(n)) = \begin{cases} M/M_n & ; \quad q = 0 \\ M_n & ; \quad q = 1 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $M_n = \{m \in M \mid n \cdot m = 0\}$ die *n-Torsion von M* ist.

Beweis. Zum Beweis von Teil 1 betrachten wir die projektive Auflösung $P_{\bullet} \rightarrow \mathbb{Z}$, definiert durch

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} = P_1 \longrightarrow \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}$$

und erhalten zunächst $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = L_0(M \otimes_{\mathbb{Z}} (\cdot))(\mathbb{Z}) = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong M$. Andererseits ist aber auch $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{0} = \mathbf{0}$ und somit für $n \geq 1$

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = L_n(M \otimes_{\mathbb{Z}} (\cdot))(\mathbb{Z}) = H_n(M \otimes_{\mathbb{Z}} P_{\bullet}) = \mathbf{0}.$$

Wir wählen zum Beweis von Teil 2 nun die projektive Auflösung $P_{\bullet} \rightarrow \mathbb{Z}/(n)$, gegeben durch

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{Z} = P_1 \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbf{0}$$

und rechnen aus, dass

$$\begin{aligned} \text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/(n)) &= L_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} (\cdot))(\mathbb{Z}/(n)) = H_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} P_{\bullet}) \\ &= H_q\left(\mathbf{0} \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id} \otimes (\cdot n)} M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}\right) \\ &\cong H_q\left(\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{m \mapsto n \cdot m} M \longrightarrow \mathbf{0}\right) \end{aligned}$$

woraus man die Aussage nun direkt ablesen kann. □

Theorem 13.24 (Universelles Koeffiziententheorem). *Sei P ein projektiver Kettenkomplex von R -Moduln, so dass $B_n(P)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ebenfalls projektiv ist. Dann existiert für jeden R -Modul M und alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (nicht-kanonisch) spaltende kurze exakte Sequenz*

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_n(P) \otimes_R M \hookrightarrow H_n(P \otimes_R M) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Beweis. Wir haben für jedes n nach Voraussetzung eine keS

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_n(P) \xleftarrow{i_n} P_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(P) \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Diese spaltet, da $B_{n-1}(P)$ projektiv ist:

$$\begin{array}{ccc} & & B_{n-1}(P) \\ & \swarrow \exists s & \downarrow \mathrm{id} \\ & \circ & \\ P_n & \longrightarrow & B_{n-1}(P) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

verifiziert 2 aus 13.9. Mit anderen Worten, wir haben eine spaltende keS von Kettenkomplexen

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_\bullet(P) \xleftarrow{i} P \xrightarrow{d} B_\bullet(P)[-1] \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Dann ist folglich auch

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_\bullet(P) \otimes_R M \xleftarrow{i \otimes \mathrm{id}} P \otimes_R M \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}} B_\bullet(P)[-1] \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{0}$$

spaltend exakt, da das Tensorprodukt additiv ist (siehe 13.3). Die induzierten Differentiale in $Z_\bullet(P)$ und $B_\bullet(P)[-1]$ sind alle $\mathbf{0}$, also hat die gemäß 2.15 induzierte lange exakte Homologiesequenz folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Z_{n+1}(P) \otimes_R M & \xrightarrow{I_{n+1}} & H_{n+1}(P \otimes_R M) & \xrightarrow{\Delta_{n+1}} & B_n(P) \otimes_R M & \longrightarrow \cdots \\ & & & & & & \downarrow \partial_n = j_n \otimes \mathrm{id} & \\ & & Z_n(P) \otimes_R M & \xrightarrow{I_n} & H_n(P \otimes_R M) & \xrightarrow{\Delta_n} & B_{n-1}(P) \otimes_R M & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

wobei $I_n = H_n(i \otimes \mathrm{id})$ und $\Delta_n = H_n(d \otimes \mathrm{id})$ die induzierten Abbildungen in der Homologie und $j_n : B_n(P) \hookrightarrow Z_n(P)$ die kanonische Inklusion bezeichnen. Um einzusehen, dass $\partial_n = j_n \otimes \mathrm{id}$ gilt, erinnere man sich an die explizite Berechnung des Differentials aus 2.15:

$$\begin{aligned} \forall c \in B_n(P) \otimes M : \partial_n(c) &= ((i_n \otimes \mathrm{id})^{-1} \circ (d_{n+1} \otimes \mathrm{id}) \circ (d_{n+1} \otimes \mathrm{id})^{-1})(c) \\ &= (i_n \otimes \mathrm{id})^{-1}(c) = (j_n \otimes \mathrm{id})(c) . \end{aligned}$$

Wir erhalten also, mit Gewalt, eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbf{0} \longrightarrow \frac{Z_n(P) \otimes_R M}{\ker(I_n)} \hookrightarrow H_n(P \otimes_R M) \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\Delta_n) \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Wegen $\ker(I_n) = \operatorname{im}(j_n \otimes \operatorname{id})$ erhalten wir bereits

$$\frac{Z_n(P) \otimes_R M}{\ker(I_n)} = \frac{Z_n(P) \otimes_R M}{\operatorname{im}(j_n \otimes \operatorname{id})} = \frac{Z_n(P) \otimes_R M}{B_n(P) \otimes_R M} = H_n(P) \otimes_R M,$$

womit zu zeigen bleibt, dass $\operatorname{im}(\Delta_n) \cong \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M)$ gilt, um die erste Aussage zu verifizieren. Bereits nach Annahme ist nun

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_{n-1}(P) \xrightarrow{j_{n-1}} Z_{n-1}(P) \twoheadrightarrow H_{n-1}(P) \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine projektive Auflösung von $H_{n-1}(P)$, da $Z_{n-1}(P)$ als direkter Summand von P_{n-1} auch direkter Summand eines freien Moduls sein muss. Demnach ist die erste Homologiegruppe des Kettenkomplexes

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_{n-1}(P) \otimes_R M \xrightarrow{j_{n-1} \otimes \operatorname{id}} Z_{n-1}(P) \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{0}$$

gerade

$$\operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M) = \ker(j_{n-1} \otimes \operatorname{id}) = \operatorname{im}(\Delta_n).$$

Damit haben wir nun die gewünschte keS, doch es bleibt zu zeigen, dass diese spaltet. Zu Beginn des Beweises haben wir bereits eine rechts-spaltende Abbildung $s : B_{n-1}(P) \rightarrow P_n$ aus der Projektivität von $B_{n-1}(P)$ abgeleitet. Aufgrund der Funktorialität erhalten wir nun

$$\underbrace{H_n(d_n \otimes \operatorname{id})}_{\Delta_n} \circ \underbrace{H_n(s \otimes \operatorname{id})}_{\sigma} = H_n((d_n \circ s) \otimes \operatorname{id}) = H_n(\operatorname{id} \otimes \operatorname{id}) = \operatorname{id},$$

und somit eine rechts-spaltende Abbildung

$$\sigma : B_{n-1}(P) \otimes_R M \longrightarrow H_n(P_n \otimes_R M),$$

welche diese Eigenschaft auch eingeschränkt auf $\operatorname{im}(\Delta_n)$ beibehält. \square

Bemerkung. Die Bedingung, dass $B_n(P)$ projektiv sein muss, ist für $R = \mathbb{Z}$ immer erfüllt. Der Grund dafür ist rein algebraischer Natur: Da P_n projektiv über \mathbb{Z} ist, ist P_n eine freie abelsche Gruppe. Damit sind sowohl $B_n(P)$ als auch $Z_n(P)$ ebenfalls frei und daher projektiv.

Korollar 13.25 (Universelles Koeffiziententheorem für singuläre Homologie). *Sei R ein kommutativer Ring und X ein beliebiger topologischer Raum. Dann hat man eine (nicht-kanonisch) spaltende keS*

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R \hookrightarrow H_q(X, R) \twoheadrightarrow \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(X), R) \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Beweis. Wir fassen R auf natürliche (und eindeutige) Weise als \mathbb{Z} -algebra auf und betrachten den projektiven (weil freien) Kettenkomplex $P := C_\bullet(X)$. Dann erhalten wir gemäß 13.24 eine spaltende keS

$$\mathbf{0} \longrightarrow H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R \hookrightarrow H_q(C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(X), R) \longrightarrow \mathbf{0}.$$

und wir haben $H_q(C_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \cong H_q(C_\bullet(X, R)) = H_q(X, R)$. □

Beispiel 13.26. Wir verwenden das universelle Koeffiziententheorem 13.24, um einige makabere Koeffizientenringe auszuprobieren. Es ist etwa

$$1. H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & ; \quad q = 0, n \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Dies folgt, da } H_q(\mathbb{S}^n, \mathbb{Q}) \cong (H_q(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(\mathbb{S}^n), \mathbb{Q})}_{\mathbf{0}, \text{ da } \mathbb{Q} \text{ flach } / \mathbb{Z}}$$

$$2. H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}/(2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(2) & ; \quad q = 0, 1, 2 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Um dies einzusehen, erinnern wir uns an 11.19. Damit ist zum einen

$$H_q(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/(2) & ; \quad q = 0, 1 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und mit 13.23 weiterhin

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{q-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2), \mathbb{Z}/(2)) = H_{q-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)_2 = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \mathbf{0} & ; \quad q = 1 \\ \mathbb{Z}/(2) & ; \quad q = 2 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

14 Singuläre Homologie von Produkten

Beware my friend - the townsfolk rumors that the splitting is not natural!

Erinnerung. Ein **Bikomplex** ist eine Familie von Objekten $\{B_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ mit Morphismen

$$\begin{aligned} d_{i,j} &:= d_{i,j}^B : B_{i,j} \longrightarrow B_{i,j-1} \\ e_{i,j} &:= e_{i,j}^B : B_{i,j} \longrightarrow B_{i-1,j} \end{aligned}$$

so dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $e_{i,j-1} \circ d_{i,j} = -d_{i-1,j} \circ e_{i,j}$.
2. $e_{i,j} \circ e_{i+1,j} = \mathbf{0}$.
3. $d_{i,j} \circ d_{i,j+1} = \mathbf{0}$.

Mit anderen Worten, $(B_{k,\bullet}, d_{k,\bullet})$ und $(B_{\bullet,k}, e_{\bullet,k})$ sind Kettenkomplexe für alle $k \in \mathbb{Z}$ und die Quadrate im Bikomplex **anti-kommutieren**. Betrachte als graphische Hilfestellung auch

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i,j} & \xrightarrow{d_{i,j}} & B_{i,j-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow e_{i,j} & & \downarrow e_{i,j-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i-1,j} & \xrightarrow{d_{i-1,j}} & B_{i-1,j-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Man definiert dann den **Totalkomplex** von B durch

$$\text{Tot}(B)_k := \bigoplus_{i+j=k} B_{i,j}$$

und das Differential

$$\bigoplus_{s+t=k-1} (\dots \mathbf{0} \oplus d_{s,t+1} \oplus e_{s+1,t} \oplus \mathbf{0} \oplus \dots) : \text{Tot}(B)_k \longrightarrow \text{Tot}(B)_{k-1}.$$

Man prüft leicht nach, dass $\text{Tot}(B)$ dadurch zu einem Kettenkomplex wird. Wir schreiben weiterhin

$$H_n(B) := H_n(\text{Tot}(B)).$$

Definition 14.1. Sei R ein kommutativer Ring, (M, d^M) und (N, d^N) zwei Kettenkomplexe von R -Moduln.

Wir erhalten dann einen Bikomplex $M \otimes N$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & M_i \otimes_R N_j & \xrightarrow{(-1)^i \text{id} \otimes d_j^N} & M_i \otimes_R N_{j-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow d_i^M \otimes \text{id} & & \downarrow d_i^M \otimes \text{id} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & M_{i-1} \otimes_R N_j & \xrightarrow{(-1)^{i-1} \text{id} \otimes d_j^N} & M_{i-1} \otimes_R N_{j-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Das Differential des Totalkomplexes $\text{Tot}(M \otimes N)$ ist gegeben durch

$$\forall m \in M_i, n \in N_j : d(m \otimes n) = (d_i^M(m) \otimes n) + ((-1)^i m \otimes d_j^N(n)).$$

Theorem 14.2 (Künneth Formel der Homologie). *Seien P und N Kettenkomplexe von R -Moduln mit P_n und $B_n(P)$ projektiv für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$\text{Tot}(H_\bullet(P) \otimes H_\bullet(N))_n \hookrightarrow H_n(\text{Tot}(P \otimes N)) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(P), H_q(N)).$$

Die Sequenz spaltet weiterhin auf nicht-kanonische Weise.

Bemerkung. Dies ist eine Verallgemeinerung des universellen Koeffiziententheorems 13.24, welches wir im Beweis jedoch benötigen werden.

Beweis. Der Beweis verläuft detailgetreu analog zum Beweis von 13.24. Es sei dem Leser empfohlen, sich diesen Beweis zunächst ausführlich zu Gemüte zu führen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $Z := Z_\bullet(P)$ den Komplex der Zyklen von P , mit $B := B_\bullet(P)$ den Komplex der Ränder von P und mit $B' := B_\bullet(P)[-1]$ den um 1 nach links verschobenen Komplex der Ränder von P . Alle haben als induziertes Differential in allen Graden die Nullabbildung. Wir beginnen dann wie zuvor mit der spaltenden keS

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_s \xleftarrow{i_s} P_s \xrightarrow{d_s} B'_s \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Da für jedes t der Funktor $(\cdot) \otimes_R N_t$ additiv ist, erhalten wir spaltende, kurze exakte Sequenzen

$$\mathbf{0} \longrightarrow Z_s \otimes_R N_t \xleftarrow{i_s \otimes \text{id}_t} P_s \otimes_R N_t \xrightarrow{d_s \otimes \text{id}_t} B'_s \otimes_R N_t \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Aufgrund unserer vorherigen Überlegungen und der Exaktheit der langen exakten Sequenz schließen folgern wir

$$\begin{aligned} \frac{H_n(\text{Tot}(Z \otimes N))}{\ker(\Phi_n)} &\cong \frac{\text{Tot}(Z \otimes H_\bullet(N))}{\text{im}(\partial_{n+1})} \cong \frac{\bigoplus_{s+t=n} Z_s \otimes H_t(N)}{\bigoplus_{s+t=n} B_s \otimes H_t(N)} \\ &\cong \bigoplus_{s+t=n} Z_s/B_s \otimes H_t(N) = \text{Tot}(H_\bullet(P) \otimes H_\bullet(N)). \end{aligned}$$

womit noch das rechte Ende unserer keS zu überprüfen bleibt. Bereits nach Annahme ist nun

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_s \xleftarrow{j_s} Z_s \longrightarrow H_s(P) \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine projektive Auflöser von $H_s(P)$. Demnach ist die erste Homologiegruppe des Kettenkomplexes

$$\mathbf{0} \longrightarrow B_s \otimes_R H_t(N) \xleftarrow{j_s \otimes H_t(\text{id}_N)} Z_s \otimes_R H_t(N) \longrightarrow \mathbf{0}$$

gerade $\text{Tor}_1^R(H_s(P), H_t(N)) = \ker(j_s \otimes H_t(\text{id}_N))$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \bigoplus_{s+t=n-1} \text{Tor}_1^R(H_s(P), H_t(N)) &= \bigoplus_{s+t=n} \text{Tor}_1^R(H_{s-1}(P), H_t(N)) \\ &\cong \bigoplus_{s+t=n} \ker(j_{s-1} \otimes H_t(\text{id}_N)) \\ &\cong \ker\left(\bigoplus_{s+t=n} j_{s-1} \otimes H_t(\text{id}_N)\right) \\ &\cong \ker(\partial_n) \cong \text{im}(\Delta_n) \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Es bleibt noch für den Fall $R = \mathbb{Z}$ zu zeigen, dass diese Sequenz spaltet. Aus der Projektivität von B'_n erhalten wir ein $\sigma_n : B'_n \rightarrow P_n$ mit $d_n \circ \sigma_n = \text{id}$. Aufgrund der Funktorialität erhalten wir nun

$$\underbrace{H_n\left(\bigoplus_{s+t=\bullet} d_s \otimes \text{id}_t\right)}_{\Delta_n} \circ \underbrace{H_n\left(\bigoplus_{s+t=\bullet} \sigma_s \otimes \text{id}_t\right)}_{\Sigma} = \underbrace{H_n\left(\bigoplus_{s+t=\bullet} (d_s \circ \sigma_s) \otimes \text{id}_t\right)}_{\text{id}}$$

womit Σ eine rechts-spaltende Abbildung definiert. \square

Korollar 14.3. *Seien X und Y beliebige topologische Räume. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\longrightarrow \text{Tot}(H_\bullet(X), H_\bullet(Y))_n \longrightarrow H_n(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \\ &\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^R(H_p(X), H_q(Y)) \longrightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

welche (nicht-kanonisch) spaltet. \square

Theorem 14.4 (Eilenberg-Zilber). *Seien X und Y topologische Räume. Dann existieren bis auf Kettenhomotopie zueinander inverse Abbildungen*

$$\text{Tot}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} C_\bullet(X \times Y),$$

welche einen Isomorphismus $H_\bullet(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \cong H_\bullet(X \times Y)$ induzieren.

Beweisskizze. Wir behaupten zunächst $\Delta_{\text{top}}^q \cong \mathbb{I}^q$. Für $q = 0, 1$ ist dies offensichtlich, daher verwenden wir dies als Verankerung einer Induktion nach q . Sei $\psi : \Delta_{\text{top}}^q \xrightarrow{\sim} \mathbb{I}^q$ ein Homöomorphismus, dann definiert die Abbildung

$$\Delta_{\text{top}}^{q+1} \ni (x_0, \dots, x_q, t) \mapsto \left(\psi \left(\frac{x_0}{1-t}, \dots, \frac{x_q}{1-t} \right), t \right) \in \mathbb{I}^{q+1}$$

einen Homöomorphismus, da offenbar

$$\mathbb{I}^{q+1} \ni (y_0, \dots, y_q, t) \mapsto ((1-t) \cdot \psi^{-1}(y_0, \dots, y_q), t) \in \Delta_{\text{top}}^{q+1}$$

ein stetiges Inverses definiert. Daraus können wir nun

$$\Delta_{\text{top}}^p \times \Delta_{\text{top}}^q \cong I^p \times I^q = I^{q+p} \cong \Delta_{\text{top}}^{p+q}$$

folgern. Nach dieser kleinen Vorbereitung beginnen wir nun mit dem Beweis, welcher sich in zwei Schritte gliedert.

Beweis für Simplices. Wir nehmen zunächst an, $X = \Delta_{\text{top}}^p$ und $Y = \Delta_{\text{top}}^q$, also $X \times Y \cong \Delta_{\text{top}}^{p+q}$ gemäß unserer Vorüberlegung. Da $\Delta_{\text{top}}^n \simeq \{*\}$ für jedes n , gilt gemäß 7.6 und 5.8

$$H_n(\Delta_{\text{top}}^r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad n = 0 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Nach 14.3 gilt also

$$\text{Tot}(H_\bullet(X), H_\bullet(Y)) \cong H_n(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)),$$

da \mathbb{Z} und $\mathbf{0}$ frei (\Rightarrow projektiv) sind und somit Tor verschwindet.

Damit sind sowohl $\text{Tot}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y))$ als auch $C_\bullet(X \times Y)$ freie und insbesondere projektive Auflösungen von \mathbb{Z} , da

$$H_0(C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^{p+q})) \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong H_0(C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^p) \otimes C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^q)).$$

Gemäß 13.16 ist also die Aussage für diesen Spezialfall bewiesen.

Allgemeiner Fall. Seien nun X und Y beliebig und

$$\text{Tot}(C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^p) \otimes C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^q)) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^{p,q}} \\ \xleftarrow{\beta^{p,q}} \end{array} C_\bullet(\Delta_{\text{top}}^{p+q})$$

die Abbildungen aus dem Spezialfall. Sei nun Wir definieren dann α durch

$$C_p(X) \otimes C_q(Y) \ni \sigma \otimes \tau \longmapsto (C_{p+q}(\sigma \times \tau) \circ \alpha_{p+q}^{p,q}) (\text{id}_p \otimes \text{id}_q) \in C_{p+q}(X \times Y)$$

und $\beta : C_\bullet(X \times Y) \rightarrow \text{Tot}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y))$ durch

$$C_n(X \times Y) \ni \rho \longmapsto ((C_\bullet(\pi_X \circ \rho) \otimes C_\bullet(\pi_Y \circ \rho)) \circ \beta_n^{n,n}) (\text{diag}_n),$$

wobei $\text{diag}_n : \Delta_{\text{top}}^n \rightarrow \Delta_{\text{top}}^n \times \Delta_{\text{top}}^n$ die Diagonalabbildung bezeichne und π_X bzw. π_Y die Projektionen von $X \times Y$ sind.

Falls die Verkettung dieser Funktionen zu Verwirrung führen sollte, betrachte man folgendes Diagramm und mache sich klar, dass zumindest die Abbildungen wohldefiniert sind:

$$\begin{array}{ccc} \text{diag}_n \in C_n(\Delta_{\text{top}}^n \times \Delta_{\text{top}}^n) & \xrightarrow{\beta_n^{n,n}} & \bigoplus_{p+q=n} C_p(\Delta_{\text{top}}^n) \otimes C_q(\Delta_{\text{top}}^n) \\ & \searrow^{C_\bullet(\rho) \otimes C_\bullet(\rho)} & \\ & & \bigoplus_{p+q=n} C_p(X \times Y) \otimes C_q(X \times Y) \\ & \searrow^{C_\bullet(\pi_X) \otimes C_\bullet(\pi_Y)} & \\ & & \bigoplus_{p+q=n} C_p(X) \otimes C_q(Y) \end{array}$$

Es gibt nun Kettenhomotopien $\alpha^{p,q} \circ \beta^{p,q} \simeq \text{id}$ und $\beta^{p,q} \circ \alpha^{p,q} \simeq \text{id}$. Mit Hilfe der Methode azyklischer Modelle kann man nun zeigen, dass α und β die gewünschten Eigenschaften erfüllen. \square

Korollar 14.5 (Homologie des Produkts). *Für topologische Räume X und Y existiert eine (nicht-kanonisch) spaltende ks*

$$\text{Tot}(H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y))_n \hookrightarrow H_n(X \times Y) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(X) \otimes H_q(Y))$$

Beweis. Dies folgt sofort aus 14.3 und 14.4. \square

Bemerkung. 14.3 und 14.4 gelten für jeden Koeffizientenring R , bei dem Untermoduln projektiver Moduln wieder projektiv sind.

Definition 14.6. Wir definieren das **Homologie-Kreuzprodukt** durch

$$\begin{array}{ccc} H_p(X) \times H_q(Y) & \longrightarrow & H_{p+q}(X \times Y) \\ (x, y) & \longmapsto & \alpha(x \otimes y) \end{array}$$

wobei α der Isomorphismus aus 14.4 ist.

Bemerkung. Man kann nachrechnen, dass das Homologie-Kreuzprodukt bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ ist.

Beispiel 14.7 (Berechnung der Homologie des Torus). Sei $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ der **Torus**. Wir wissen bereits aus 10.1, dass

$$H_q(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; \quad q = 0, 1 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt also, $H_q(\mathbb{S}^1)$ ist ein freier \mathbb{Z} -Modul für alle q , demnach also

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot, H_q(\mathbb{S}^1)) = \mathbf{0}.$$

Damit folgt aus 14.5 nun

$$H_n(\mathbb{T}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(\mathbb{S}^1) \otimes H_q(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\otimes 2} & \cong \mathbb{Z} & ; \quad n = 0 \\ \mathbb{Z}^{\otimes 2} \oplus \mathbb{Z}^{\otimes 2} & \cong \mathbb{Z}^2 & ; \quad n = 1 \\ \mathbb{Z}^{\otimes 2} & \cong \mathbb{Z} & ; \quad n = 2 \\ & \mathbf{0} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Literatur

- [NIK] Nikolai Nowaczyk: *The Collected Trivialities of Homological Algebra usually left to the Reader as an Exercise*, 2009.
- [SZ] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, Teubner, Stuttgart 1994